الجزء الأول	التطورات الرتـيـبة
الوحدة 01	تطور كميات مادة المتفاعلات والنواتج خلال تحول كيميــائي في محلول مائي
	حلــول تمـــارين الكتاب المدرسي *GUEZOURI Aek – Lycée Maraval - Oran*

التمرين 01

تعليق : خطأ علمي في هذا التمرين .

الصورة التي نلاحظها في الشكل لا علاقة لها بالتحول الكيميــائي المدروس في نص التمرين .

العبارة الواردة في التمرين << **نشاهد في التجربة التالية ظهور اللون الأصفر لحظة إضافة كلور الهيدروجين إلى محلول ثيوكبريتات الصوديوم** ...>> هذا غير صحيح !!

ماذا يحدث في الحقيقة ؟

بعد حوالي ثانيتين من لحظة إضافة حمض كلور الهيدروجين إلى محلول ثيوكبريتات الصوديوم لا نلاحظ أي شيء ، وبعد حوالي عشر ثوان يبدأ اللون الأصفر يظهر ، وهو لون الكبريت S .

التفسير :

في بداية التفاعل تبدأ بلورات الكبريت في التشكّل ، وهي بلورات متناهية في الصغر أبعادها من رتبة الميكرو متر . تقوم هذه البلورات بنشر الضوء ، ويكون اللون الأزرق أكثر انتشارا (خواص الكبريت) ، فبالنسبة لملاحظ جانبي (لا ينظر شاقوليا للإناء) يشاهد في البداية اللون الأزرق الفاتح .

بمرور الزمن يزداد حجم بلورات الكبريت فيتعكر المحلول . **للمزيد انقر هنا**

1 - اللون الأصفر هو لون الكبريت (S) .

2 - يدوم التحول حوالي 10 ثوان ، نعتبره سريعا .

3 - نحضر عدّة محاليل لثيوكبريتات الصوديوم بنفس الحجم لكن بتراكيز مختلفة في كؤوس متماثلة شفافة . نضع هذه الكؤوس فوق قطع ورقية عليها علامة بالحبر الأسود (مثلا حرف A) .

في اللحظة $t = 0$ نضيف نفس الحجم من محلول حمض كلور الهيدروجين لكل الكؤوس .

ملاحظة :

استعملنا نفس الحجم من المزيج المتفاعل حتى لا يتدخّل سمك طبقة السائل كعامل في حجب العلامة السوداء . وبالتالي يكون السبب الوحيد في حجب العلامة هو كمية الكبريت الناتجة في كل كأس .

ليكن Δn كمية مادة الكبريت الناتجة في المدة الزمنية Δt ، ونعلم أنه يلزم نفس كمية مادة الكبريت في الكؤوس لحجب العلامة السوداء ولكننا نحصل على هذه الكميات في أزمنة متفاوتة .

السرعة المتوسطة لظهور الكبريت هي : $v = \dfrac{\Delta n}{\Delta t}$. السرعة تتناسب عكسيا مع المدة Δt .

التمرين 02

1 – يدلّ الصدأ على أن الحديد تفاعل مع ثنائي الأكسجين.

2 – معـادلة التفاعل الكيميـائي : $4\,Fe + 3\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3$

3 – تفاعل بطيء .

التمرين 03

1 – الثنائيتان هما : I_2 / I^- و $S_4O_6^{\,2-} / S_2O_3^{2-}$

2 - المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما :

$$I_2 + 2\,e^- = 2\,I^-$$

$$2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2\,e^-$$

3 - معادلة الأكسدة – إرجــاع : $I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \rightarrow S_4O_6^{2-} + 2\,I^-$

4 - قبل التكافؤ يزول لون ثنائي اليود كلما امتزج مع ثيوكبريتات الصوديوم (ثنائي اليود هو المتفاعل المحدّ) . ولما نصل للتكافؤ فأية قطرة إضافية منه تنزل للكأس يستقر لونها الأسمر .

التمرين 04

1 – يحدث التفاعل بين الثنائيتين *Ox/Rd* : I_2 / I^- و $S_2O_8^{2-} / SO_4^{2-}$

2 - المعادلتان النصفيتــان :

$$2I^- = I_2 + 2\,e^-$$

$$S_2O_8^{2-} + 2\,e^- = 2\,SO_4^{2-}$$

3 - معادلة الأكسدة – إرجــاع :

$$2\,I^-_{(aq)} + S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} \rightarrow I_{2(aq)} + 2\,SO_4^{2-}{}_{(aq)}$$

4 – سبب ظهور اللون الأسمر هو تشكل ثنائي اليود I_2 .

التمرين 05

1 – الغاز الذي ينطلق هو غاز ثنائي الأكسجين O_2 . نكشف عنه مثلا بإشعال عود ثقاب ثم إطفائه وإدخـاله مباشرة في أنبوب التجربة فنلاحظ أن جمرته تزداد توهجا .

2 – نعلم أن شاردة البرمنغنات هي مؤكسد قوي ، إذن في هذه الحالة الماء الأوكسجيني يلعب دور مرجع .

الثنائتان هما : MnO_4^- / Mn^{2+} و O_2 / H_2O_2

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان همـا :

$$2 \times (\ MnO_4^-{}_{(aq)} + 5\,e^- + 8\,H^+_{(aq)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 4\,H_2O_{(l)}\ )$$

$$5 \times (\ H_2O_{2\,(aq)} = O_{2\,(g)} + 2\,e^- + 2\,H^+_{(aq)}\ )$$

معادلة الأكسدة – ارجـاع هي : $2\,MnO_4^-{}_{(aq)} + 6\,H^+_{(aq)}\ 5\,H_2O_2 \rightarrow 2\,Mn^{2+}_{(aq)} + 5\,O_{2\,(g)} + 8\,H_2O_{\,(l)}$

التمرين 06

1 – الغـاز المنطلق هو غـاز ثنائي الهيدروجين H_2 . نكشف عنه مثلا بتقريب عود ثقاب مشتعل من فوهة الأنبوب بعد سده لبعض الدقائق حتى تتجمع كمية معتبرة منه ، تحدث فرقعة ناتجة عن تفاعل ثنائي الهيدروجين مع ثنائي الأكسجين الموجود في الهواء .

2 - المرجع هو الصوديوم Na

المؤكسد هو المــاء

3 – الثنائيتان همـا : Na^+ / Na و H_2O / H_2

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما : $2 \times (\ Na = Na^+ + e^-\ )$

$$2\,H_2O + 2\,e^- = H_2 + 2\,OH^-$$

معادلة الأكسدة إرجــاع : $2\,Na_{\,(s)} + 2\,H_2O_{(l)} \rightarrow 2\,Na^+_{\,(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)} + H_{2\,(g)}$

التمرين 07

1 – الثنائيتان هما : Cu^{2+} / Cu و Fe^{2+} / Fe

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما : $Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^- = Cu_{(s)}$ إرجاع

$Fe_{(s)} = Fe^{2+}_{(aq)} + 2e^-$ أكسدة

معادلة الأكسدة – ارجـاع هي : $Cu^{2+}_{(aq)} + Fe_{(s)} \rightarrow Fe^{2+}_{(aq)} + Cu_{(s)}$

2 – يدلّ زوال اللون الأزرق على أن كل شوارد النحاس الثنائية قد تحوّلت إلى ذرات نحاس (نلاحظ لون أحمر فوق برادة الحديد الفائضة وهو لون النحاس) . هذا التفاعل سريع ، لا يدوم إلا بعض الثواني .

3 – لكي نكشف عن الشوارد المتشكلة نرشّح ناتج التفاعل ونضيف للمحلول محلولا لهيدروكسيد الصوديوم $(Na^+_{(aq)} , OH^-_{(aq)})$ فيتشكل راسب أخضر لهيدروكسيد الحديد الثنائي (معروف بلونه الخاص) $Fe(OH)_2$ ، دلالة على أن الشوارد الناتجة هي شوارد الحديد الثنائي (Fe^{2+}) .

التمرين 08

1 - الثنائيتان هما : MnO_4^- / Mn^{2+} و O_2 / H_2O_2

2 - المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما :

$$2 \times (MnO_4^-{}_{(aq)} + 5e^- + 8H^+_{(aq)} = Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)})$$

$$5 \times (H_2O_{2\,(aq)} = O_{2\,(g)} + 2e^- + 2H^+_{(aq)})$$

معادلة الأكسدة – ارجـاع هي : $2MnO_4^-{}_{(aq)} + 6H^+_{(aq)}\ 5H_2O_2 \rightarrow 2Mn^{2+}_{(aq)} + 5O_{2\,(g)} + 8H_2O_{(l)}$

3 – نحن بمثابة معايرة محلول الماء الأكسوجيني بواسطة محلول برمنغنات البوتاسيوم ، إذن المتفاعل المحدّ قبل التكافؤ هو برمنغنات البوتاسيوم .

قبل التكافؤ كلما تنزل كمية من برمنغنات البوتاسيوم يزول لونها لتفاعلها مع H_2O_2 (الشفاف) وظهور Mn^{2+} (الشفاف) . وعندما نبلغ التكافؤ ، أية قطرة زيادة من برمنغنات البوتاسيوم يستقر لونها لعدم وجود H_2O_2 لتتفاعل معه لأن هذا الأخير ينتهي عند التكافؤ .

(عندما تجيب لست مطالبا بكل هذا الشرح ، بل قلْ فقط : عندما نبلغ التكافؤ يستقر اللون البنفسجي لبرمنغنات البوتاسيوم) .

4 – جدول التقدم

معادلة التفاعل	$2MnO_4^-{}_{(aq)}$	$+ 6H^+_{(aq)}$	$5H_2O_2 \rightarrow$	$2Mn^{2+}_{(aq)} +$	$5O_{2\,(g)} +$	$8H_2O_{(l)}$	
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)					
الحالة الابتدائية	0	$n(MnO_4^-)$	$n(H^+)$	$n(H_2O_2)$	0	0	زيادة
الحالة الانتقالية	x	$n(MnO_4^-) - 2x$	$n(H^+) - 6x$	$n(H_2O_2) - 5x$	$2x$	$5x$	زيادة
الحالة النهائية	x_E	$n(MnO_4^-) - 2x_E$	$n(H^+) - 6x_E$	$n(H_2O_2) - 5x_E$	$2x_E$	$5x_E$	زيادة

5 – عند التكافؤ يكون لدينا : $n(MnO_4^-) - 2x_E = 0$ (1)

$n(H_2O_2) - 5x_E = 0$ (2)

نستخرج عبارة x_E من العلاقة (1) ونعوّضها في (2) ، نجد : $n(H_2O_2) = \frac{5}{2} n(MnO_4^-)$ ، أي :

$C V = \frac{5}{2} C' V'_E$ ، حيث V'_E هو حجم برمنغنات البوتاسيوم المضاف عند التكافؤ .

6 – (معلومة ناقصة في هذا التمرين ، هي قيمة V'_E) . نأخذ من عندنا قيمة ملائمة ، ولتكن $V'_E = 12{,}5\ mL$.

نحسب التركيز المولي لمحلول الماء الأكسوجيني : $C = \frac{5}{2}\frac{C'V'_E}{V} = 1{,}6\times10^{-1} mol/L$

التمرين 09

1 - الثنائيتان هما : $Mg^{2+}_{(aq)} / Mg_{(s)}$ و $H^+_{(aq)} / H_{2\,(aq)}$.

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما :

$$Mg_{(s)} = Mg^{2+}_{(aq)} + 2e^-$$

$$2H^+_{(aq)} + 2e^- = H_{2\,(g)}$$

معادلة الأكسدة – إرجـاع : $Mg_{(s)} + 2H^+_{(q)} \rightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2\,(g)}$

2 – نحسب كمية مادة H^+ و Mg الابتدائيتين : $n(H^+) = C_1 V_1 = 1 \times 10 \times 10^{-3} = 1{,}0 \times 10^{-2}$ mol

$$n(Mg) = \frac{36{,}45\times10^{-3}}{24{,}3} = 1{,}5\times10^{-3} mol$$

المتفاعل المحد : ننشيء جدول التقدم :

معادلة التفاعل	$Mg_{(s)}$ +		$2H^+_{(q)}$ →	$Mg^{2+}_{(aq)}$ +	$H_{2\,(g)}$
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)			
الابتدائية	0	$1{,}5 \times 10^{-3}$	10^{-2}	0	0
الانتقالية	x	$1{,}5 \times 10^{-3} - x$	$10^{-2} - 2x$	x	x

من حل المعادلتين التاليتين نجد القيمة الصغرى لـ x هي الموافقة لكمية مادة المغنزيوم ، وبالتالي المغنزيوم هو المتفاعل المحد .

$$1{,}5 \times 10^{-3} - x = 0 \quad ، \quad 10^{-2} - 2x = 0$$

القيمة الصغرى لـ x هي $1{,}5 \times 10^{-3}$ mol ، وهي نفسها قيمة x_{max} .

من الجدول لدينا $n(H_2) = x_{max} = 1{,}5 \times 10^{-3}$ mol

من المعطيات لدينا بعد 15 mn كمية مادة ثنائي الهيدروجين هي : $n(H_2) = \frac{V_{H_2}}{V_m} = \frac{31\times10^{-3}}{22{,}4} = 1{,}38\times10^{-3} mol$

وهذه القيمة أصغر من x_{max} ، إذن التفاعل لم ينتهي بعد 15 mn .

التمرين 10

التفاعل منمذج بالمعادلة : $2A + B \rightarrow C + D$ ، وهو من الشكل : $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C + \delta D$

لدينا العلاقة بين سرعات اختفاء وظهور الأفراد الكيميائية A ، B ، C ، D هي $\frac{v_A}{\alpha} = \frac{v_B}{\beta} = \frac{v_C}{\gamma} = \frac{v_D}{\delta}$.

في حالتنا هذه لدينا $\alpha = 2$ ، $\beta = \gamma = \delta = 1$

$\frac{v_A}{2} = \frac{v_C}{1}$ ، وبالتعويض : $v_C = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1 mol.L^{-1}.mn^{-1}$

التمرين 11

1 – يُعتبر التفاعل بطيئا .

2 – السرعة الحجمية المتوسطة : $v = -\frac{1}{V}\frac{\Delta n(MnO_4^-)}{\Delta t}$ (1)

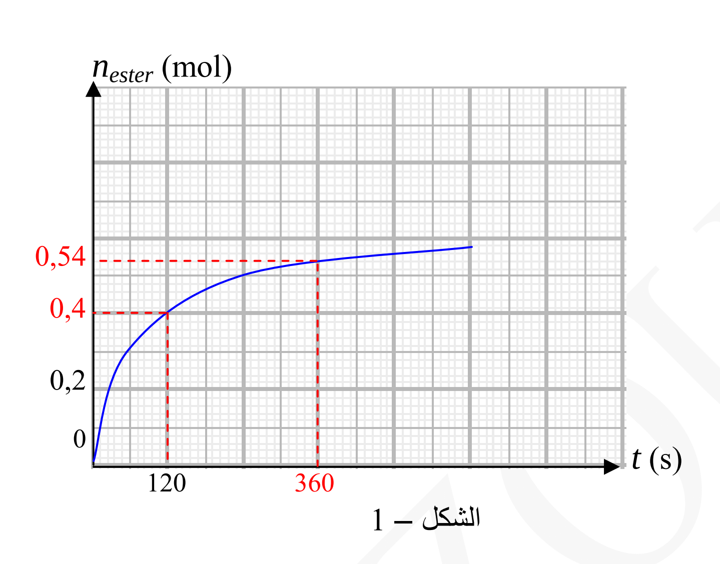
لدينا : $n(MnO_4^-) = C\,V = 0{,}01 \times 0{,}05 = 5 \times 10^{-4}$ mol

بالتعويض في (1) : $v = -\frac{1}{0{,}1}\frac{(0-5\times10^{-4})}{140} = 3{,}6\times10^{-5}\,mol.L^{-1}.s^{-1}$

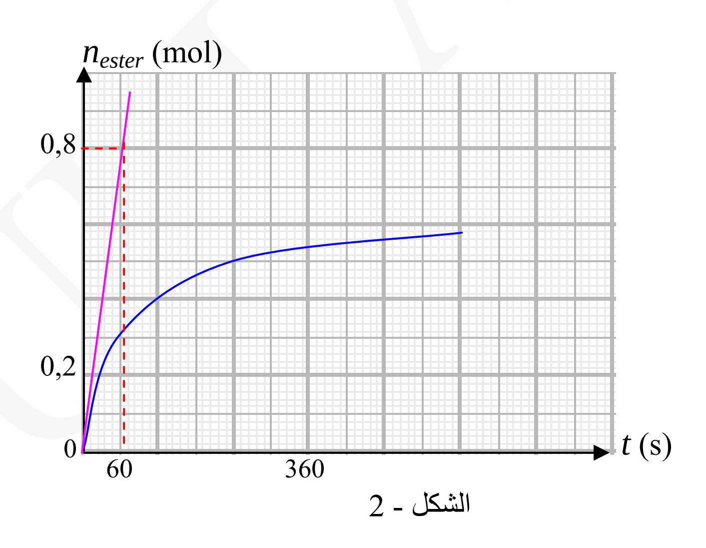
التمرين 12

1 – السرعة المتوسطة لتشكل الأستر $CH_3–COO–C_2H_5$ في المجال الزمني [120 , 360 s] هي :

$v_m = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{0{,}54-0{,}40}{240} = 5{,}8\times10^{-4}\,mol.s^{-1}$ (الشكل – 1)



الشكل – 1



الشكل - 2

2 – السرعة عند اللحظة $t = 0$:

تمثل هذه السرعة ميل المماس للبيان $n_{Ester} = f(t)$ في المبدأ (الشكل – 2) ، $v = \frac{0{,}8-0}{60-0} = 1{,}3\times10^{-2}\,mol.s^{-1}$

3 – زمن نصف التفاعل : لدينا $x_f = 0{,}6\,mol$ من البيان ، ومنه $\frac{x_f}{2} = 0{,}3\,mol$. الزمن الموافق لهذه القيمة على البيان هو

$t_{1/2} = 60\,s$.

التمرين 13

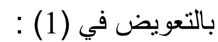
1 - خـاطئة (الصحيح : أكبر ما يمكن)

2 - خـاطئة (الصحيح : تنتهي نحو الصفر)

3 - لكي نتأكد من صحة أو خطأ النتيجة نحسب ميل المماس للبيان في النقطة التي فاصلتها $t = 40$ s ، ثم نقسّم النتيجة على حجم المزيج $V = V_1 + V_2 = 0{,}4$ L

$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$ (1)

$\frac{dx}{dt} = \frac{7{,}5\times10^{-3}}{64} = 1{,}17\times10^{-4}\,mol.mn^{-1}$



بالتعويض في (1) :

$$v = \frac{1}{0,4} \times 1,17 \times 10^{-4}$$

$$v = 2,92 \times 10^{-4}\, mol.L^{-1}.\ mn^{-1}$$

يُعتبر الاقتراح صحيح .

(الدقة في رسم المماس)

ملاحظة :

لا يمكن لكل التلاميذ أن يجدوا نفس قيمة الميل ، لأن هذا راجع لدقة الرسم ، ولهذا في تصحيح امتحان البكالوريا في هذه الحالة يُعطى مجال لقيم الميل (مثلا من 5,5 إلى 5,8) . كل هذه القيم تعتبر صحيحة .

يتبع ... الجزء الثاني من التمارين من 14 إلى 29

GUEZOURI Abdelkader – Lycée Maraval – Oran
http://www.guezouri.org

التمرين 14

1 – جدول التقدّم :

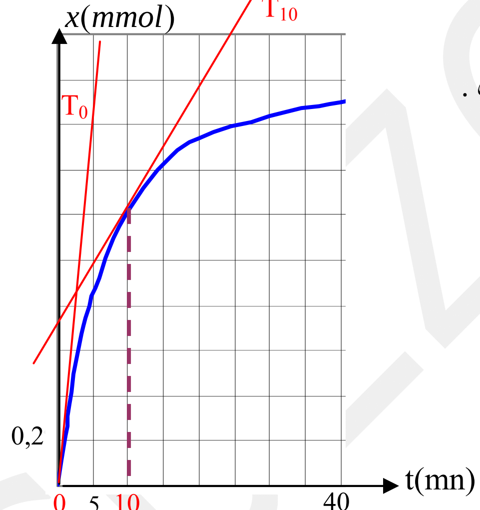
معادلة التفاعل	$H_2O_{2\,(aq)}$ + $2\,H^+_{(aq)}$ + $2\,I^-$ → $I_{2\,(aq)}$ + $2\,H_2O_{(l)}$				
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)			
الحالة الابتدائية	0	$n\,(H_2O_2)$	$n\,(H^+)$	0	زيادة
الحالة الانتقالية	x	$n\,(H_2O_2) - x$	$n\,(H^+) - 2\,x$	x	زيادة
الحالة النهائية	x_{max}	$n\,(H_2O_2) - x_{max}$	$n\,(H^+) - 2\,x_{max}$	x_{max}	زيادة

2 – من الجدول لدينا : $n(I_2) = x$ ، ومن جهة أخرى لدينا $n(I_2) = [I_2]\,V$ ، ومنه $x = 0{,}2\,[I_2]$

بواسطة هذه العلاقة الأخيرة نحسب قيم التقدم باستعمال التراكيز المولية لثنائي اليود المسجلة على الجدول .

t (mn)	0	1	2	4	6	8	12	16	20	30	40	60	120
x (mmol)	0	0,22	0,42	0,74	0,920	1,10	1,32	1,46	1,54	1,64	1,70	1,74	1,74

البيان $x = f(t)$: انظر للشكل .



3 - أ) السرعة الحجمية للتفاعل هي سرعة التفاعل من أجل وحدة حجم المزيج المتفاعل .

$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$$

السرعة الحجمية للتفاعل عند اللحظة t = 0 :

نحسب ميل المماس T_0 ونقسم النتيجة على حجم المزيج V .

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \frac{1{,}6\times10^{-3}}{5} = 3{,}2\times10^{-4}\,mol.mn^{-1}$$

$$v_0 = \frac{1}{0{,}2}\times3{,}2\times10^{-4} = 1{,}6\times10^{-3}\,mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{10} = \frac{0{,}8\times10^{-3}}{15} = 5{,}3\times10^{-5}\,mol.mn^{-1}$$

$$v_{10} = \frac{1}{0{,}2}\times5{,}3\times10^{-5} = 2{,}6\times10^{-4}\,mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

ب) نلاحظ في الجدول أن التركيز المولي لثنائي اليود يصبح ثابتا ابتداء من $t = 60$ s ، وبالتالي x كذلك .

لو رسمنا المماس للبيان $x = f(t)$ لكان أفقيا ، أي ميله معدوم ، ومنه $v_{100} = 0$.

جـ) نلاحظ أن سرعة التفاعل تتناقص خلال الزمن ، والسبب هو تناقص تراكيز المتفاعلات .

التمرين 15

1 – الثنائيتان هما : $MnO_4^-{}_{(aq)} / Mn^{2+}{}_{(aq)}$ و $CO_{2\,(aq)} / H_2C_2O_{4\,(aq)}$

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما :

$$2 \times (\ MnO_4^-{}_{(aq)} + 5\,e^- + 8\,H^+{}_{(aq)} = Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4\,H_2O_{(l)}\ )$$

$$5 \times (H_2C_2O_{4\,(aq)} = 2\,CO_{2\,(aq)} + 2\,H^+{}_{(aq)} + 2\,e^-)$$

معادلة الأكسدة – ارجـاع :

$$2\,MnO_{4\,(aq)} + 5\,H_2C_2O_{4\,(aq)} + 6\,H^+{}_{(aq)} \rightarrow 2\,Mn^{2+}{}_{(aq)} + 10\,CO_{2\,(aq)} + 8\,H_2O_{(l)}$$

2 – كمية مادة شاردة البرمنغنات : $n(MnO_4^-) = C_1 V_1 = 10^{-3} \times 0,05 = 5 \times 10^{-5}\ mol$

كمية مادة شاردة حمض الأكساليك : $n(H_2C_2O_4) = C_2 V_2 = 10^{-1} \times 0,05 = 5 \times 10^{-3}\ mol$

3 – نحسب كمية مادة حمض الأكساليك التي تكفي لتفاعل كل كمية مادة البرمنغنات المعطاة :

	$2\,MnO_{4\,(aq)}$ +	$5\,H_2C_2O_{4\,(aq)}$ +	$6\,H^+{}_{(aq)}$ →	$2\,Mn^{2+}{}_{(aq)}$ +	$10\,CO_{2\,(aq)}$ +	$8\,H_2O_{(l)}$
$t = 0$	$n(MnO_4^-)$	$n(H_2C_2O_4)$				
نهاية التفاعل	$n(MnO_4^-) - 2\,x_{max}$	$n(H_2C_2O_4) - 5\,x_{max}$				

عند نهاية التفاعل يكون لدينا : $n(MnO_4^-) - 2\,x_{max} = 0$ (1)

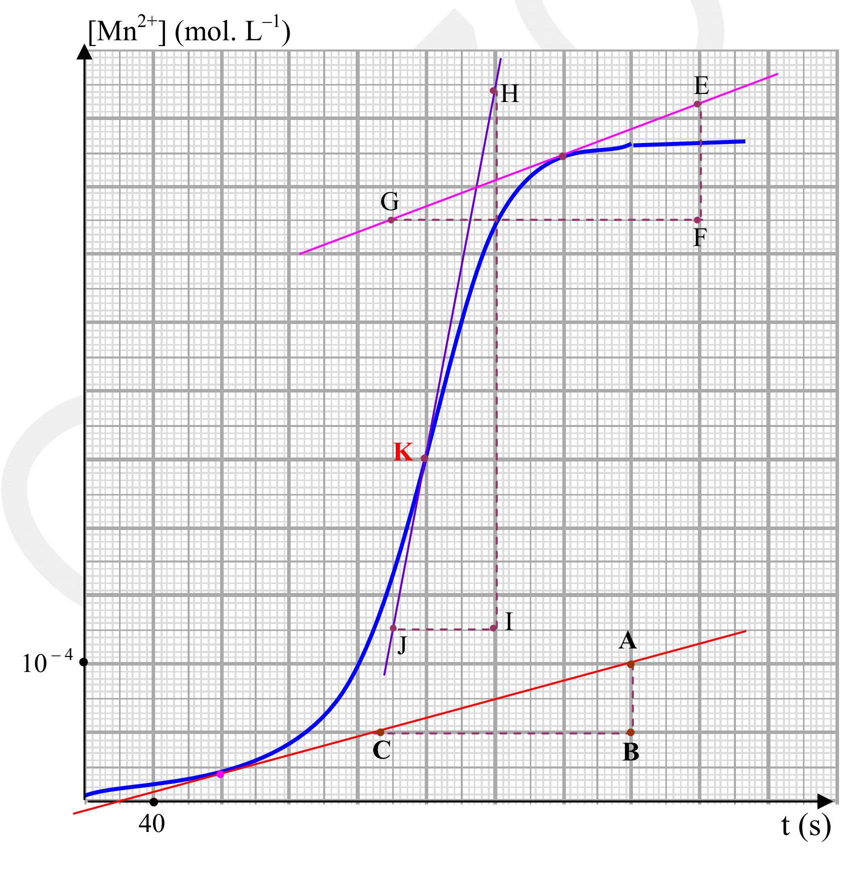
$n(H_2C_2O_4) - 5\,x_{max} = 0$ (2)

باستخراج عبارة x_{max} من (1) وتعويضها في (2) ، نجد :

$$n(H_2C_2O_4) = \frac{5}{2}\ n(MnO_4^-) = 2,5 \times 5 \times 10^{-5} = 12,5 \times 10^{-5}\ mol$$ ،

ونحن لدينا كمية أكبر من هذه $(5 \times 10^{-3}\ mol)$

إذن ، نعم الكمية كافية لزوال لون برمنغنات البوتاسيوم .



4 - نحسب ميل كل مماس للبيان ، والذي يمثل السرعة الحجمية لتشكل شوارد المنغنيز :

في اللحظة $t_1 = 80\ s$:

$$\frac{d[Mn^{2+}]}{dt} = \frac{AB}{CD} = \frac{0,5 \times 10^{-4}}{40 \times 3,7} = 3,38 \times 10^{-7}$$

$$v_1 = 3,38 \times 10^{-7}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$$

في اللحظة $t_2 = 200\ s$:

$$\frac{d[Mn^{2+}]}{dt} = \frac{HI}{JI} = \frac{3,75 \times 10^{-4}}{60} = 6,25 \times 10^{-6}$$

$$v_2 = 6,25 \times 10^{-6}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$$

في اللحظة $t_3 = 280$ s :

$$\frac{d[Mn^{2+}]}{dt} = \frac{EF}{GF} = \frac{0,85\times10^{-4}}{40\times4,5} = 4,72\times10^{-7}$$

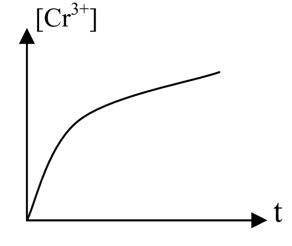
$$v_3 = 4,72\times10^{-6}\, mol.L^{-1}.s^{-1}$$

الاستنتاج : نلاحظ أن سرعة تشكل شاردة المنغنيز تزداد ابتداء من اللحظة $t = 0$ ، ثم تمر بقيمة عظمى ثم تتناقص بعد ذلك .

تمر بالقيمة العظمى في نقطة انعطاف البيان (K) . ، وهذه القيمة هي v_2 .

ملاحظة : لو استعملنا بدل برمنغنات البوتاسيوم مثلا ثنائي كرومات البوتاسيوم ومثلنا البيان $[Cr^{3+}] = f(t)$ لوجدنا بيانا بالشكل التالي

إذن ما هو السبب ؟



لمعرفة السبب نجري التجربة التالية : نكوّن مزيجين متماثلين في التراكيز المولية وفي الحجوم من برمنغنات البوتاسيوم وحمض الأكساليك ونضيف لأحدهما فقط بعض المليمترات المكعبة من محلول كلور المنغنيز $(Mn^{2+}_{(aq)}, 2\,Cl^{-}_{(aq)})$. نلاحظ أن المزيج الذي أضفنا له كلور المنغنيز يكون فيه التفاعل أسرع ، معنى هذا أن شوارد المنغنيز محفز لهذا التفاعل .

إذن ماذا يحدث لما نمزج برمنغنات البوتاسيوم وحمض الأكساليك ؟

تسمى هذه الظاهرة **التحفيز الذاتي** ، أي أن أحد نواتج التفاعل يلعب دور المحفز كذلك ، وفي مثالنا هذا شوارد المنغنيز تلعب هذا الدور .

في بداية التفاعل يكون التركيز المولي لشوارد المنغنيز ضعيفا ، لهذا تكون سرعة تشكل المنغنيز ضعيفة (120 ثانية الأولى) .

عندما يتزايد التركيز المولي لشوارد المنغنيز في المزيج يزداد التحفيز ، وبالتالي تزداد سرعة تشكل المنغنيز وتمر بقيمة عظمى ، وذلك عند اللحظة 200 s .

بعد اللحظة 240 s تتناقص السرعة رغم إزدياد التركيز المولي لشوارد المنغنيز ، لأن التراكيز المولية للمتفاعلات أصبحت ضعيفة و هذا يؤثر على سرعة تشكل المنغنيز سلبا .

التمرين 16

1 – معادلة تفاعل المعايرة :

الثنائيتان هما : I_2 / I^- و $S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$

المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما :

$$I_2 + 2\,e^- = 2\,I^-$$

$$2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2\,e^-$$

معادلة الأكسدة – إرجـاع :

$$I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \rightarrow S_4O_6^{2-} + 2\,I^-$$

2 -

	I_2	+	$2\,S_2O_3^{2-}$	→	$S_4O_6^{2-}$	+	$2\,I^-$
t = 0	$n(I_2)$		$n(S_2O_3^{2-})$		0		0
التكافؤ	$n(I_2) - x_E$		$n(S_2O_3^{2-}) - 2\,x_E$		x_E		$2\,x_E$

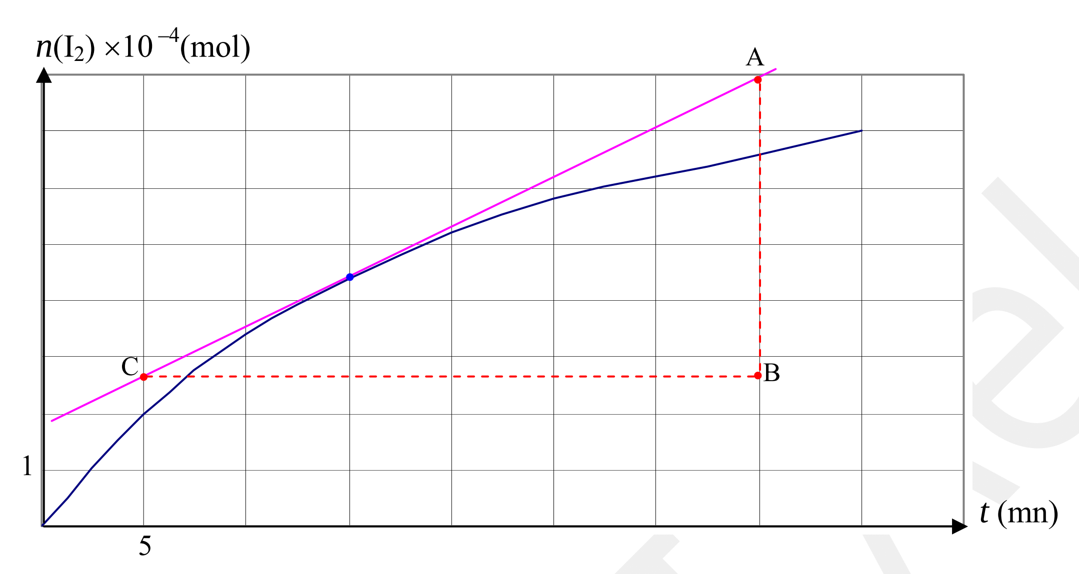
عند التكافؤ يكون لدينا :

$$n(S_2O_3^{2-}) - 2\,x_E = 0 \quad (1)$$

$$n(I_2) - x_E = 0 \quad (2)$$

بحذف x_E بين العلاقتين (1) و (2) نجد : $n(I_2) = 0,5\, n(S_2O_3^{2-})$ ، وبالتالي : $n(I_2) = 0,5\, C' V'$

3 – **الرسم البياني** $n(I_2) = f(t)$



4 - أ) **السرعة الحجمية المتوسطة لتشكل ثنائي اليود بين** $t_1 = 10$ mn و $t_2 = 20$ mn :

في اللحظة t_1 تشكل $3,4 \times 10^{-5}$ mol من ثنائي اليود في حجم قدره 10 mL . أما في المزيج الإبتدائي 100 mL تشكلت القيمة $n_1 = 3,4 \times 10^{-5} \times 10 = 3,4 \times 10^{-4}$ mol .

في اللحظة t_2 تشكل $5,2 \times 10^{-5}$ mol من ثنائي اليود في حجم قدره 10 mL . أما في المزيج الإبتدائي 100 mL تشكلت القيمة $n_2 = 5,2 \times 10^{-5} \times 10 = 5,2 \times 10^{-4}$ mol (لا تنس أن إضافة الماء لا يغيّر عدد المولات) –أضفنا الماء من أجل السّقي فقط .

$$v_m = \frac{1}{V}\frac{(n_2 - n_1)}{\Delta t} = \frac{1}{0,1}\frac{(5,2-3,4)\times 10^{-4}}{10} = 1,8\times 10^{-4}\, mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

ب) **السرعة الحجمية اللحظية لتشكل ثنائي اليود في اللحظة** $t = 15$ mn :

$$\frac{d\, n(I_2)}{dt} = \frac{AB}{CB} = \frac{5,3\times 10^{-4}}{6\times 5} = 1,76\times 10^{-5}$$

$$v_{15} = \frac{1}{V}\frac{d\, n(I_2)}{dt} = \frac{1}{0,1}\times 1,76\times 10^{-5} = 1,76\times 10^{-4}\, mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

5 - أ) يحدث التفاعل بين الثنائيتين : I_2 / I^- و $S_2O_8^{2-} / SO_4^{2-}$

المعادلتان النصفيتـان :

$$2I^- = I_2 + 2e^-$$

$$S_2O_8^{2-} + 2e^- = 2SO_4^{2-}$$

معادلة الأكسدة – إرجـاع : $2I^-_{(aq)} + S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} \rightarrow I_{2(aq)} + 2SO_4^{2-}{}_{(aq)}$

ب)

	$S_2O_8^{2-}{}_{(aq)}$	+ $2I^-_{(aq)}$	→	$I_{2(aq)}$	+ $2SO_4^{2-}{}_{(aq)}$
t = 0	$n_0(S_2O_8^{2-})$	$n_0(I^-)$		0	0
t	$n_0(S_2O_8^{2-}) - x$	$n_0(I^-) - 2x$		x	$2x$

لدينا في اللحظة t كمية مادة $S_2O_8^{2-}$ في المزيج هي : $n(S_2O_8^{2-}) = n_0(S_2O_8^{2-}) - x$

نشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن :

$\frac{d\,n(S_2O_8^{2-})}{dt} = \frac{d\,n_0(S_2O_8^{2-})}{dt} - \frac{dx}{dt}$ ، ولدينا $\frac{d\,n_0(S_2O_8^{2-})}{dt}$ عبارة عن ثابت ، إذن مشتقه بالنسبة لأي متغير معدوم .

وبالتالي : $\frac{d\,n(S_2O_8^{2-})}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ ، ومنه سرعة اختفاء $S_2O_8^{2-}$ هي سرعة التفاعل بالقيمة المطلقة .

جـ) نلاحظ في السؤال (ب) أن $x = n(I_2)$ ، إذن البيان $n(I_2) = f(t)$ هو نفس البيان $x = f(t)$.

سرعة التفاعل في اللحظة $t = 15$ mn هي ميل المماس للبيان في النقطة التي فاصلتها 15 mn .

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\,n(I_2)}{dt} = 1{,}76\times10^{-5}\,mol.mn^{-1}$$

التمرين 17

1 – الثنائيتان همـا : Zn^{2+} / Zn و H^+ / H_2

المعادلتان النصفيتان : $Zn_{(s)} = Zn^{2+}_{(aq)} + 2\,e^-$

$2\,H^+_{(aq)} + 2\,e^- = H_{2\,(g)}$

معادلة الأكسدة – ارجـاع : $Zn_{(s)} + 2\,H^+ \rightarrow Zn^{2+}_{(aq)} + H_{2\,(g)}$

2 – جدول التقدّم :

معادلة التفاعل	$Zn_{(s)}$ +	$2\,H^+_{(q)}$ →	$Zn^{2+}_{(aq)}$ +	$H_{2\,(g)}$	
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)			
الابتدائية	0	n (Zn)	n (H^+)	0	0
الانتقالية	x	n (Zn) $- x$	n (H^+) $- 2\,x$	x	x
النهائية	x_{max}	n (Zn) $- x_{max}$	n (H^+) $- 2\,x_{max}$	x_{max}	x_{max}

تعيين المتفاعل المحدّ :

$$n(Zn) = \frac{m}{M} = \frac{2{,}3}{65{,}4} = 3{,}5\times10^{-2}\,mol$$

$$n(H^+) = C_A\,V = 0{,}2\times0{,}1 = 2{,}0\times10^{-2}\,mol$$

القيمة الأصغر لـ x في حل المعادلتين التاليتين توافق المتفاعل المحدّ :

$$3{,}5\times10^{-2} - x = 0 \Rightarrow x = 3{,}5\times10^{-2}\,mol$$

$$2{,}0\times10^{-2} - 2x = 0 \Rightarrow x = 1{,}0\times10^{-2}\,mol$$

إذن المتفاعل المحدّ هو حمض كلور الهيدروجين (لا تنس أن $n(H^+) = n(Cl^-) = n(HCl)$) .

من الجدول لدينا $n\,(Zn^{2+}) = x$ ، وبالتالي $[Zn^{2+}]\,V = x$ ، العلاقة المطلوبة هي : $x = 0{,}1\,[Zn^{2+}]$

3 – زمن نصف التفاعل هو المدّة اللازمة لبلوغ التفاعل نصف تقدّمه النهائي .

إذا كان هذا التفاعل تـاما يكون هذا الزمن لازما لاستهلاك نصف كمية مادة المتفاعل المحدّ .

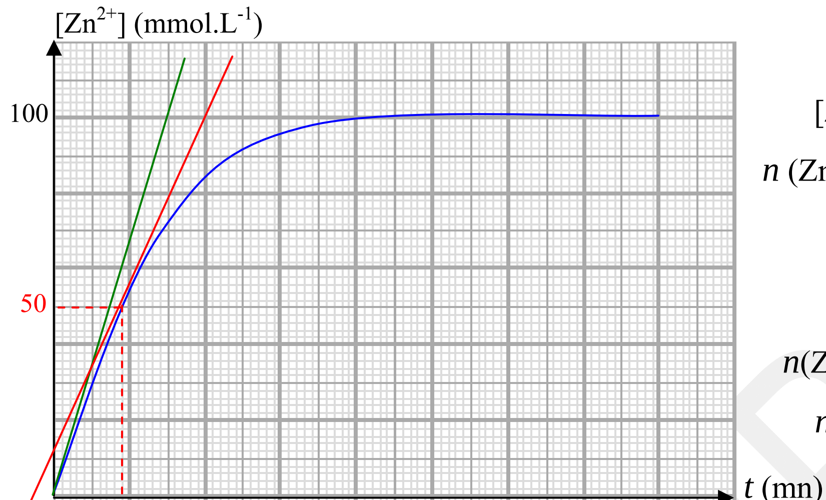
لدينا $x_{max} = 0,1\,[Zn^{2+}]_{max}$ ، ومن البيان لدينا $[Zn^{2+}]_{max} = 0,1$ mol/L ، ومنه $x_{max} = 1,0\times10^{-2}$ mol .

$\frac{x_{max}}{2} = 5,00\times10^{-3}\,mol$. هذه القيمة توافق على البيان $\frac{0,5x_{max}}{V} = \frac{5\times10^{-3}}{0,1} = 50\times10^{-3} = 50\,mmol/L$

فاصلة هذه القيمة للتركيز المولي توافق حوالي $t = 4,5$ mn ، أي $t_{1/2} = 4,5\,mn$ (الشكل – 1)

ملاحظة :

كان من الممكن تقسيم التركيز المولي لـ Zn^{2+} على 2 واستنتاج زمن نصف التفاعل مباشرة ، لكني فصلت ذلك لهدف منهجي .



الشكل - 1

4 – **تركيب الوسط التفاعلي عند** $t_{1/2} = 4,5\,mn$:

لدينا عند هذه اللحظة : $[Zn^{2+}] = 50\times10^{-3}$ mol/ L

ومنه $n(Zn^{2+}) = 50\times10^{-3}\times0,1 = 5,00\times10^{-3}$ mol

ولدينا من الجدول : $n(Zn^{2+}) = x$ ، ومنه :

$x = 5\times10^{-3}\,mol$ ، وبالتالي :

$n(Zn) = 3,5\times10^{-2} - 5\times10^{-3} = 3,00\times10^{-3}$ mol

$n(H^+) = 2\times10^{-2} - 10\times10^{-3} = 1,0\times10^{-2}$ mol

تركيب الوسط التفاعلي عند $t = t_f$:

لدينا من البيان $[Zn^{2+}] = 0,1$ mol/ L . نحسب عدد مولات هذه الشاردة في حجم المزيج 100 mL .

$n(Zn^{2+}) = [Zn^{2+}]\,V = 0,1\times0,1 = 10^{-2}$ mol ، ومنه $x = 10^{-2}\,mol/L$ ، إذن :

$n(Zn) = 3,5\times10^{-2} - 10^{-2} = 2,5\times10^{-2}$ mol

$n(H^+) = 2\times10^{-2} - 2\times10^{-2} = 0$

5 - حتى يكون الرسم واضحا فصلنا كل جزء لوحده .

في اللحظة $t = 0$:

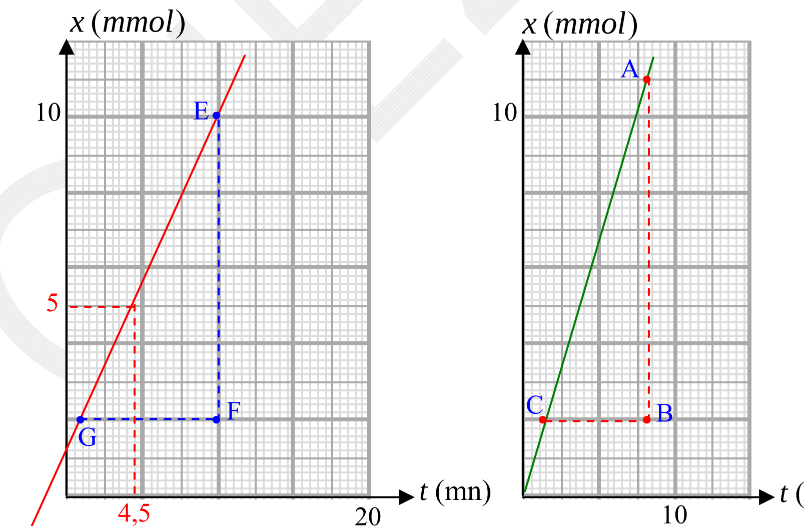
$$\frac{dx}{dt} = \frac{AB}{CB} = \frac{9\times10^{-3}}{7,5} = 1,2\times10^{-3}$$

$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{1,2\times10^{-3}}{0,1} = 1,2\times10^{-2}\,mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

في اللحظة $t_{1/2}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{EF}{GF} = \frac{8\times10^{-3}}{9} = 8,9\times10^{-4}$$

$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{8,9\times10^{-4}}{0,1} = 8,9\times10^{-3}\,mol.L^{-1}.mn^{-1}$$



الشكل - 3 الشكل - 2

التمرين 18

ملاحظة : في هذا التمرين يجب أن يكون $[S_i] > [S]$.

استبدل التركيز الابتدائي للسكاروز : $[S_i] = 0,2$ mol/L

استبدل الجدول :

t(mn)	0	200	400	600	800	1000	2000
S (mmol/L)	200	100	50	25	12,5	6,2	3,1
$Y = [S_i] - [S]$ (mmol/L)							

1 – جدول التقدّم :

معادلة التفاعل	$C_{12}H_{22}O_{11\,(aq)}$ + $H_2O_{(l)}$ → $C_6H_{12}O_{6\,(aq)}$ + $C_6H_{12}O_{6\,(aq)}$				
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)			
الحالة الابتدائية	0	n_0	بزيادة	0	0
الحالة الانتقالية	x	$n_0 - x$	بزيادة	x	x
الحالة النهائية	x_{max}	$n_0 - x_{max}$	بزيادة	x_{max}	x_{max}

2 - سرعة التفاعل مفهوم يتجانس مع كميّة مادة مقسومة على زمن . تتناسب سرعة التفاعل في كل لحظة مع مشتق التقدّم بالنسبة للزمن ، وهو ميل المماس في اللحظة t .

المطلوب هنا أن نبيّن أن السرعة الحجمية للتفاعل هي $\dfrac{dy}{dt}$.

لدينا $[S] = \dfrac{n_0 - x}{V}$ و ، ولدينا كذلك $y = [S_i] - [S]$ ، و منه : $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d([S_i] - [S])}{dt} = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$

الكمية $y = [S_i] - [S]$ هي التركيز المولي للساكاروز في اللحظة t ، حيث : $y = \dfrac{n_0}{V} - \dfrac{n_0 - x}{V} = \dfrac{x}{V}$.

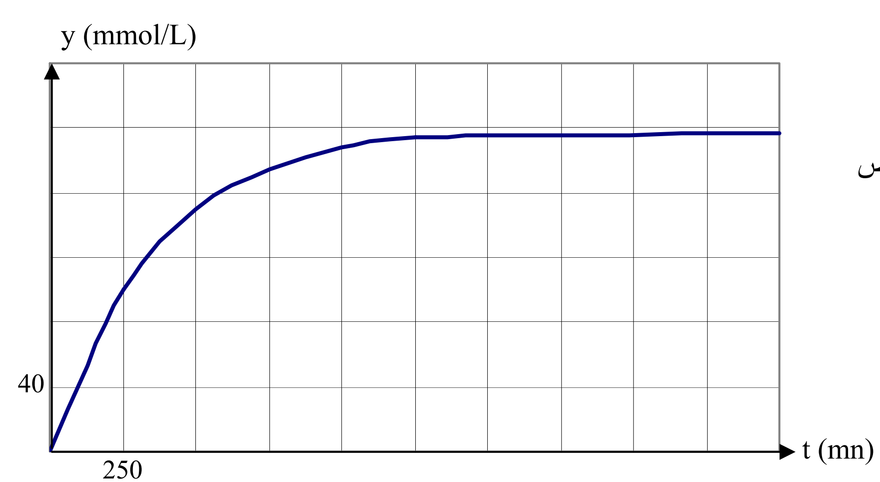
3 – الجدول :

t (mn)	0	200	400	600	800	1000	2000
y (mmol/L)	0	100	150	175	187,5	193,8	196,9

لدينا $y = \frac{x}{V}$

أي $x(t) = V\ y(t)$

4 - نلاحظ أنه كلما يزداد تقدم التفاعل تتناقص السرعة الحجمية للتفاعل .



التمرين 19

معادلة التفاعل : $5Br^- + BrO_3^- + 6H^+ \rightarrow 3Br_2 + 3H_2O$

للمزيد : الثنائيتان هما : BrO_3^- / Br_2 و Br_2 / Br^-

المعادلتان النصفيتان: $2\ BrO_3^-{}_{(aq)} + 12\ H^+{}_{(aq)} + 10\ e^- = Br_{2\,(aq)} + 6\ H_2O_{(l)}$

$2\ Br^-{}_{(aq)} = Br_{2\,(aq)} + 2\ e^-$

1 - **جدول التقدّم**

معادلة التفاعل	$5\ Br^-{}_{(aq)}$ +	$BrO_3^-{}_{(aq)}$ +	$6\ H^+$ →	$3\ Br_{2\,(aq)}$ +	$3\ H_2O_{(l)}$	
حالة الجملة	التقدم	كمية المــادة (mol)				
الحالة الابتدائية	0	$n_0(Br^-)$	$n_0(BrO_3^-)$	$n_0(H^+)$	0	زيادة
الحالة الانتقالية	x	$n_0(Br^-) - 5x$	$n_0(BrO_3^-) - x$	$n_0(H^+) - 6x$	$3x$	زيادة
الحالة النهائية	x_{max}	$n_0(Br^-) - 5\ x_{max}$	$n_0(BrO_3^-) - x_{max}$	$n_0(H^+) - 6x_{max}$	$3x_{max}$	زيادة

حصيلة المادة معناه التركيب المولي للمزيج (كمية المادة لكل متفاعل ولكل ناتج)

عند اللحظة $t = 0$

الفرد الكيميائي	Br^-	BrO_3^-	H^+	Br_2	H_2O
كمية المادة (mol)	12	2	12	0	زيادة

عند اللحظة $t = t_{1/2}$ (زمن نصف التفاعل)

نبحث أولا عن المتفاعل المحدّ ، بحيث نعدم عدد مولات كل متفاعل ونأخذ أصغر قيمة لـ x .

$n_0(Br^-) - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2,4\ mol$

$n_0(BrO_3^-) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ mol$

$n_0(H^+) - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\ mol$

المتفاعلان المحدّان هما : BrO_3^- و H^+ ، ومنه $x_{max} = 2\ mol$

عند زمن نصف التفاعل تكون لدينا نصف قيمة x_{max} ، أي : $\frac{x_{max}}{2} = 1\,mol$ ، وبالتالي يكون التركيب المولي للمزيج :

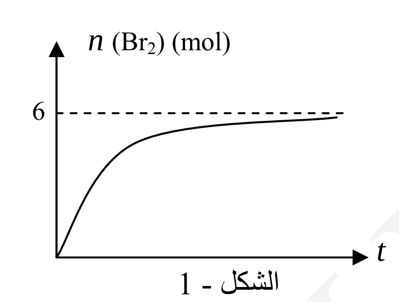
الفرد الكيميائي	Br^-	BrO_3^-	H^+	Br_2	H_2O
كمية المادة (mol)	$12 - 5 = 7$	$2 - 1 = 1$	$12 - 6 = 6$	$3 \times 1 = 3$	زيادة

$t \to \infty$

عند نهاية التفاعل يكون $x = x_{max}$ ، ويكون حينئذ التركيب المولي للمزيج :

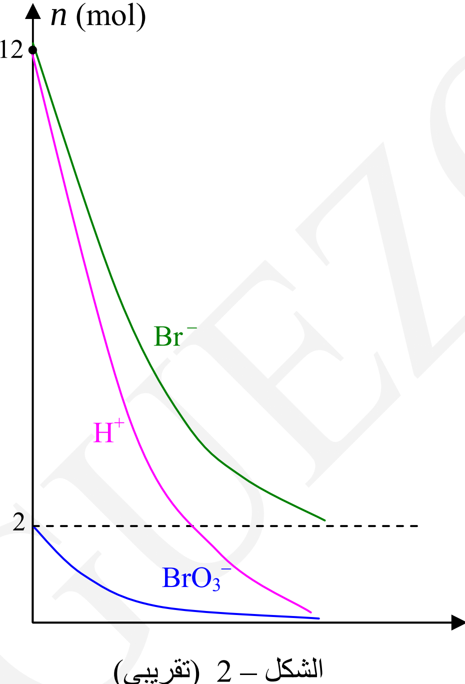
الفرد الكيميائي	Br^-	BrO_3^-	H^+	Br_2	H_2O
كمية المادة (mol)	$12 - 10 = 2$	0	0	$3 \times 2 = 6$	زيادة

2 - أ) عند اللحظة t يكون $n(Br_2) = 3x$ ، وعندما ينتهي t نحو ∞ يكون $x = x_{max}$ ، وبالتالي يكون السلم في الشكل 1 :



الشكل - 1

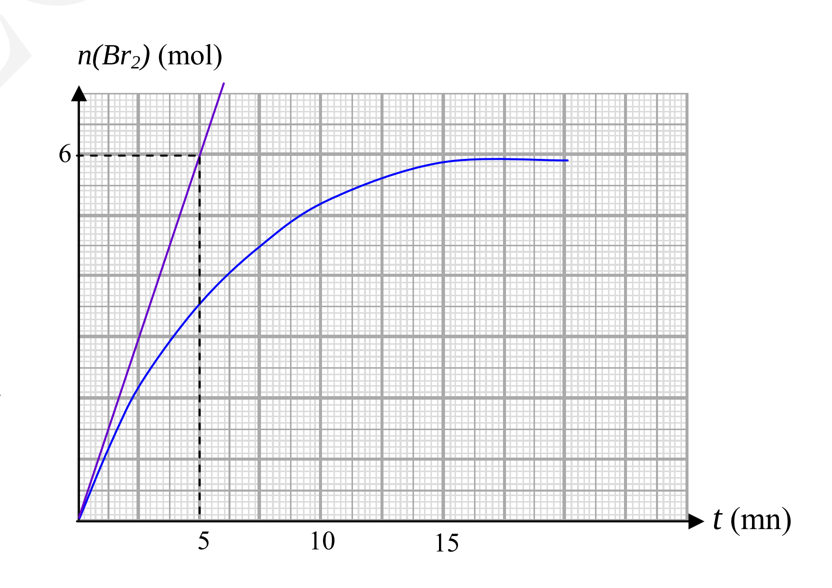
ب) تمثيل g(t) ، h(t) ، k(t) (الشكل – 2)



الشكل – 2 (تقريبي)

جـ) لدينا سرعة التفاعل $v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{V}\frac{d\frac{n(Br_2)}{3}}{dt} = \frac{1}{3V}\frac{d\,n(Br_2)}{dt}$

إذن لحساب سرعة التفاعل ، نحسب ميل البيان $n(Br_2) = f(t)$ ونقسمه على 3 V



ميل المماس عند اللحظة $t = 0$ هو : $\frac{6}{5} = 1{,}2$ ، ومنه السرعة هي : $v = \frac{1{,}2}{0{,}3} = 4\,mol.L^{-1}mn^{-1}$

التمرين 20

1- النواتج هي : شوارد المغنيزيوم (Mg^{2+}) وثنائي الهيدروجين (H_2)

2 –

كمية مـــادة حمض كلور الهيدروجين : $n(HCl) = n(H^+) = C\,V' = 0,1 \times 0,2 = 2,0 \times 10^{-2}$ mol

كمية مـادة المغنيزيوم : $n(Mg) = \frac{m}{M} = \frac{9\times10^{-2}}{24,3} = 3,7\times10^{-3}\,mol$

3 – المتفاعل المحد :

المعادلة	$Mg_{(S)}$ +	$2H^+_{(aq)}$ →	$Mg^{2+}_{(aq)}$ +	$H_{2\,(g)}$
t = 0	$3,7 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-2}$	0	0
t	$3,7\times10^{-3} - x$	$2,0\times10^{-2} - 2x$	x	x

نعدم عدد مولات كل متفاعل في اللحظة t ونحسب قيمة x في كل معادلة .

$$3,7\times10^{-3} - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3,7\times10^{-3}\,mol$$

$$2,0\times10^{-2} - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,0\times10^{-2}\,mol$$

المتفاعل المحد هو المغنيزيوم لأن $3,7 \times 10^{-3} < 10 \times 10^{-3}$

4 - العبارة الحرفية للتقدم بدلالة P_{H_2} :

لدينا $P_{H_2} = P - P_{atm}$ ، ولدينا قانون الغازات المثالية $P_{H_2}V = n\,RT$ ، حيث n كمية مادة ثنائي الهيدروجين في اللحظة t والذي يساوي التقدم x . وبالتالي نكتب : $(P - P_{atm})V = x\,RT$ ، مع العلم أن V هو حجم غاز الهيدروجين في اللحظة t .

العبارة هي : $$x = (P - P_{atm})V\frac{1}{RT} \qquad (1)$$

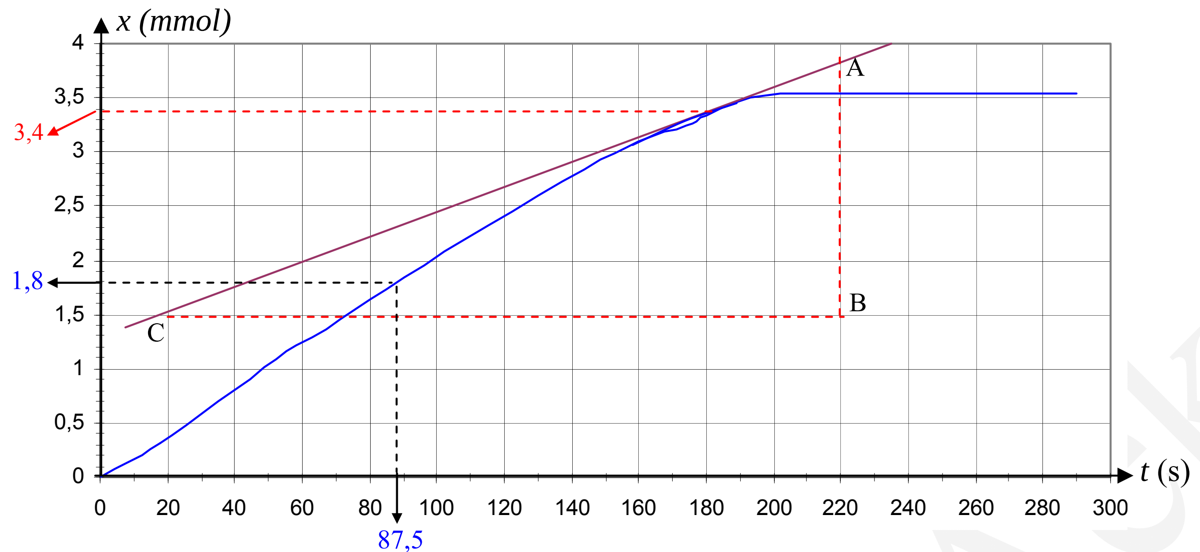
5 – ننشئ جدولا به قيم التقدم والزمن ، بالتعويض في العبارة (1) ، علما أن $V = 500 - 200 = 300\ mL = 3,0 \times 10^{-4}\ m^3$.

ودرجة الحرارة المطلقة $T = 20 + 273 = 293°K$ وبالتالي $x = (P - P_{atm})\times1,23\times10^{-7}$

من أجل القيمة الأولى لدينا $P = P_{atm}$ ، وبالتالي $x = 0$

من أجل القيمة الثانية لدينا $P - P_{atm} = 2,5 \times 10^3$ Pa ، وبالتالي $x = 3,1\times10^{-4}\,mol$ ، وهكذا بالنسبة للقيم الباقية .

t (s)	0	18	52	71	90	115	144	160	174	193	212	238	266	290
$x(mmol)$	0	0,31	1,10	1,45	1,84	2,32	2 ,83	3,10	3,24	3,50	3,54	3,54	3,54	3,54



6 – من البيان لدينا $x_{max} \approx 3,6$ mmol ، وبالتالي $\frac{x_{max}}{2} = 1,8\ mmol$ ، وهذه القيمة توافق الزمن $t_{1/2} = 87,5$ s

7 - السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t = 180$ s :

$$v = \frac{1}{V}\frac{AB}{CB} = \frac{1}{0,2}\frac{2,4\times10^{-3}}{206} = 5,8\times10^{-5}\,mol.L^{-1}.s^{-1}$$

8 - من البيان لدينا عند $t = 180$ s تكون $x = 3,4$ mmol ، ونعلم أن $n\,(H_2) = x$.

نحسب الحجم المولي للغازات في درجة الحرارة 293°K ، أي حجم 1 mol .

$$PV_0 = n\,RT \Rightarrow V_0 = \frac{n\,RT}{P} = \frac{1\times8.31\times293}{1,009\times10^5} = 2413\times10^{-5}\,m^3 = 24,13L$$

حجم ثنائي الهيدروجين هو V_{H_2} حيث : $n\,(H_2) = \frac{V_{H_2}}{V_0}$ ، وبالتالي : $V_{H_2} = 24,13\times3,4\times10^{-3} = 82\times10^{-3}\,L$

$n\,(Mg^{2+}) = x = 3,4$ mmol ، ويكون التركيز المولي $[Mg^{2+}] = \frac{3,4\times10^{-3}}{0,2} = 1,7\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$

التمرين 21

ملاحظة : في البيـان المرفق مع التمرين ، على التراتيب $[I_2]$ (mmol/L) وليس mol/L .

1 - نبرّد الجزء الذي نريد معايرته من أجل إيقاف التفاعل فيه (أي إيقاف تكوّن ثنائي اليود) ، وذلك للتمكن من معايرة فقط الكمية التي تكون موجودة في لحظة التبريد .

2 – الثنائيتان هما : $S_2O_8^{2-} / SO_4^{2-}$ و I_2 / I^-

3 – النوع الكيميــائي المرجع هو شاردة اليود I^-

التعليل : رقم تأكسد عنصر اليود ارتفع من (1-) في I^- إلى (0) في I_2

4 – النوع الكيميــائي المؤكسد هو شاردة البيروكسوثنائي كبريتات $S_2O_8^{2-}$.

التعليل : رقم تأكسد عنصر الكبريت في $S_2O_8^{2-}$ هو x حيث : $2x - 16 = -2$ ، ومنه : $x = 7$

رقم تأكسد عنصر الكبريت في SO_4^{-2} هو x' حيث : $x' - 8 = -2$ ، ومنه : $x' = 6$ (رقم التأكسد انخفض)

5 – المعادلتان النصفيتان الإلكترونيتان هما : $S_2O_8^{2-} + 2\,e^- = 2\,SO_4^{2-}$ معادلة الإرجـاع

معادلة الأكسدة $2\,I^- = I_2 + 2\,e^-$

6 – كميات المادة الابتدائية للمتفاعلات :

$n(S_2O_8^{2-}) = n(K_2S_2O_8) = C_1V_1 = 1,5 \times 10^{-2} \times 0,5 = 7,5 \times 10^{-3}$ mol

$n(I^-) = n(KI) = C_2V_2 = 0,5\,V_2$

7 – جدول التقدم

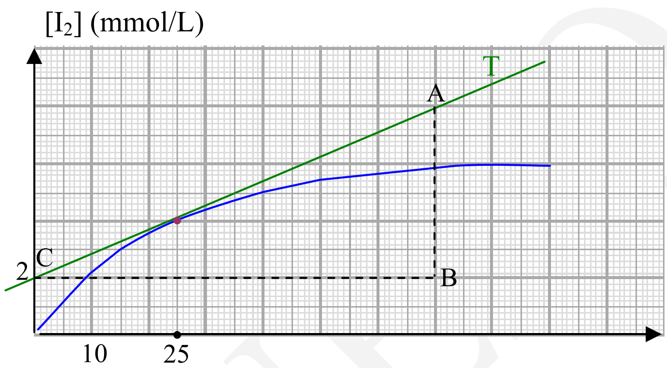
معادلة التفاعل	$2\,I^-_{(aq)}$ +	$S_2O_8^{2-}{}_{(aq)}$ →	$I_{2(aq)}$ +	$2\,SO_4^{2-}{}_{(aq)}$	
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة (mol)			
الابتدائية	0	$n(I^-)$	$n(S_2O_8^{2-})$	0	0
الانتقالية	x	$n(I^-) - 2x$	$n(S_2O_8^{2-}) - x$	x	$2x$
النهائية	x_{max}	$n(I^-) - 2x_{max}$	$n(S_2O_8^{2-}) - x_{max}$	x_{max}	$2x_{max}$

لكي نتأكد أن x يتغيّر بنفس الطريقة التي يتغيّر بها $[I_2]$ بدلالة الزمن ، نجد العلاقة بين x و $[I_2]$.

لدينا من جدول التقدم : $n(I_2) = x$ ، ومنه : $[I_2]\,V = x$ ، حيث V هو حجم المزيج وقيمته 1L ، وبالتالي $[I_2] = x$

إذن التقدم والتركيز المولي لثنائي اليود يتطوران بنفس الكيفية .

8 – نحسب ميل المماس T والذي يمثل السرعة الحجمية للتفاعل .



$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{d[I_2]}{dt} = \frac{2 \times 3 \times 10^{-3}}{7 \times 10} = 8,5 \times 10^{-5}\,mol.L^{-1}.mn^{-1}$$

9 – من البيان نستنتج التركيز المولي النهائي لثنائي اليود ،

وهو $[I_2] = 6 \times 10^{-3}$ mol/L ، ومنه كمية مـادة ثنائي اليود: $n(I_2) = [I_2]\,.\,V = 6 \times 10^{-3} \times 1 = 6 \times 10^{-3}$ mol

لو كان المتفاعل المحد هو $S_2O_8^{2-}$ لكنا وجدنا كمية مادة ثنائي اليود $7,5 \times 10^{-3}$ mol ، أي عدد مولات $S_2O_8^{2-}$ التي حسبناها سابقا .

إذن المتفاعل المحد هو شوارد اليــود .

10 – زمن نصف التفاعل هو الزمن الموافق لنصف قيمة التقدم النهائي (أو الأعظمي للتفاعلات التامة)

من البيان التقدم الأعظمي $x_{max} = 6 \times 10^{-3}\,mol$ ومنه $\frac{x_{max}}{2} = 3 \times 10^{-3}\,mol$. الزمن الموافق على البيان هو $t_{1/2} = 15mn$

11 – بما أن المتفاعل المحد هو شاردة اليود فإن $n(I^-) - 2x_{max} = 0$ ، ومنه $n(I^-) = 2 \times 6 \times 10^{-3} = 1,2 \times 10^{-2}$ mol

ولدينا $n(I^-) = 0,5\,C_2$ ، ومنه : $C_2 = 2,4 \times 10^{-2}$ mol/L

التمرين 22

المركب العضوي 2- كلور – 2 – ميثيل بروبان هو

$$CH_3-\underset{CH_3}{\overset{Cl}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-CH_3$$

. من أجل اختصار الكتابة نمثله بـ $R-Cl$ ، حيث الجذر الألكيبي R هو $-C(CH_3)_3$

نكتب المعادلة إذن : $R-Cl_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow R-OH_{(aq)} + Cl^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$

1 – يمكن متابعة هذا التحول عن طريق قيـاس الناقلية لأن في المزيج المتفاعل توجد شوارد ، وهي Cl^- و H^+ ، ونعلم أن الشوارد هي المسؤولة عن الناقلية الكهربائية للمحـاليل .

2 – التركيز الكتلي لـ $R-Cl$ هو $S = 4\ g/L$

التركيز المولي هو التركيز الكتلي مقسوم على الكتلة المولية الجزيئية ، أي $C = \dfrac{S}{M}$

كمية مادة $R-Cl$ هي $n\,(R-Cl) = [R-Cl]\,.\,V = \dfrac{S}{M}\,.\,V = 2\times10^{-3}\times\dfrac{4}{92{,}5} = 8{,}6\times10^{-5}\ mol$

الماء موجود بزيـادة ، حيث لدينا الحجم المضاف هو $80\times\dfrac{95}{100} = 76\ mL$. ونعلم أن الكتلة الحجمية للماء هي 1 g/mL

إذن كتلة الماء المضافة هي 76 g ، وهذا يوافق $n(H_2O) = \dfrac{76}{18} = 4{,}22\ mol$ ، وهي كمية كبيرة بالنسبة لكمية R – Cl

3 – جدول التقدم :

معادلة التفاعل		$R\text{-}Cl_{(aq)}$ +	$2\,H_2O_{(l)}$ →	$R\text{-}OH_{(aq)}$ +	$H^+_{(aq)}$ +	$Cl^-_{(aq)}$
حالة الجملة الكيميائية	التقدم	كمية المـــادة بـ (mol)				
الحالة الابتدائية	0	$8{,}6\times10^{-5}$	زيادة	0	0	0
الحالة الانتقالية	$x(t)$	$8{,}6\times10^{-5} - x(t)$	زيادة	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
الحالة النهائية	x_{max}	$8{,}6\times10^{-5} - x_{max}$	زيادة	x_{max}	x_{max}	x_{max}

4 - تُعطى الناقلية النوعية بالعلاقة $\sigma = \lambda_{Cl^-}[Cl^-] + \lambda_{H^+}[H^+]$ ، ولدينا : $[Cl^-] = \dfrac{n(Cl^-)}{V}$ و $[H^+] = \dfrac{n(H^+)}{V}$.

ومن جدول التقدم نستنتج $n(Cl^-) = n(H^+) = x(t)$ ، ومنه : $\sigma(t) = \dfrac{(\lambda_{Cl^-} + \lambda_{H^+})}{V}\,x(t)$ (1)

5 – تكون الناقلية النوعية معدومة في اللحظة $t = 0$ ، لأن المزيج يكون خاليا من الشوارد (يتواجد نوعان كيميائيان جزيئيان هما R- Cl و H_2O ، مع الإشارة إلى أننا أهملنا شوارد $H^+_{(aq)}$ و $OH^-_{(aq)}$ في الماء لأن تركيزهما حوالي 10^{-7} mol/L)

6 – في نهاية التفاعل يكون $x = x_{max}$ ، وبالتالي تكون الناقلية النوعية : $\sigma_f = \dfrac{(\lambda_{Cl^-} + \lambda_{H^+})}{V}\,x_{max}$ (2)

7 – التقدم الأعظمي يساوي كمية مادة 2 – كلور-2- ميثيل بروبان ، أي $x_{max} = 8{,}6\times10^{-5}\ mol$

8 – بتقسيم العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\dfrac{\sigma_f}{\sigma(t)} = \dfrac{x_{max}}{x(t)}$ ، ومنه $x(t) = x_{max}\dfrac{\sigma(t)}{\sigma_f}$ (3)

9 - نستعمل العلاقة (3) لحساب التقدم في كل لحظة ، مع العلم أن $\sigma_f = 298{,}1\ \mu S.cm^{-1}$ (من الجدول) .

من أجل كل لحظة نقسم $\sigma(t)$ على σ_f ونضرب الناتج في x_{max} ، مع ترك الناقليتين النوعيتين بنفس الوحدة .

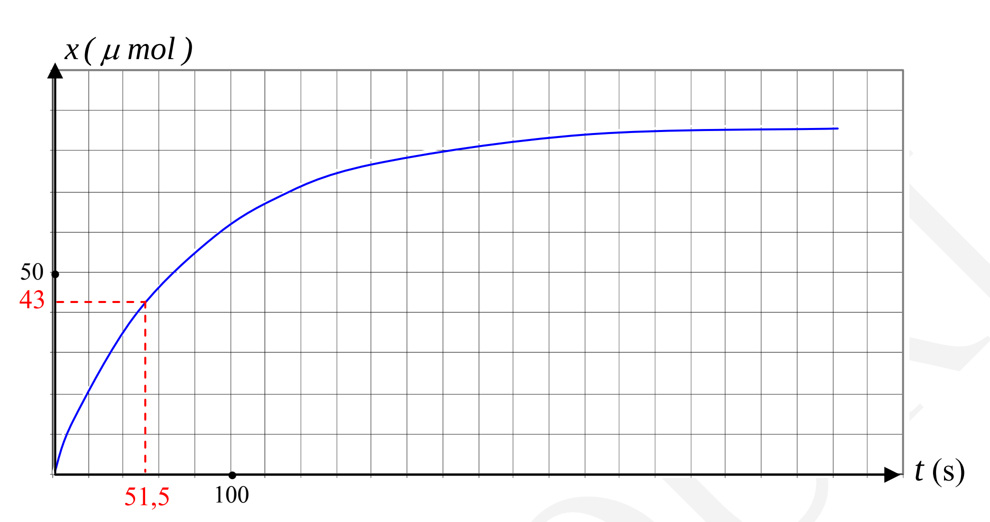
t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$x(t)(\mu\,mol)$	0	15,2	21,5	28,6	34,9	41,2	46,6	49,3	55,5	59,1
t (s)	100	110	120	140	160	190	220	240	285	315
$x(t)(\mu\,mol)$	61,8	65,4	67,2	71,6	75,2	78,8	80,6	82,4	84,2	85,1
t (s)	365	375	380	450						
$x(t)(\mu\,mol)$	86,0	86,0	86,0	86,0						

10 - تمثيل التقدم بدلالة الزمن :

على محور التراتيب غيّرت السلم

بـ: 1 cm → 10 µ mol

للتذكير : (1µ mol = 10^{-6} mol)



11 – زمن نصف التفاعل هو الزمن الموافق لنصف قيمة التقدم الأعظمي .

لدينا التقدم الأعظمي $x_{max} = 86\ \mu\,mol$ ، ومنه $\frac{x_{max}}{2} = 43\mu\,mol$. الزمن الموافق على البيان $t_{1/2} \approx 51{,}5$ s

– 12

السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t = 60$ s :

$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{V}\frac{AB}{CB}$$

$$v = \frac{1}{82\times10^{-3}}\ \frac{66\times10^{-6}}{140}$$

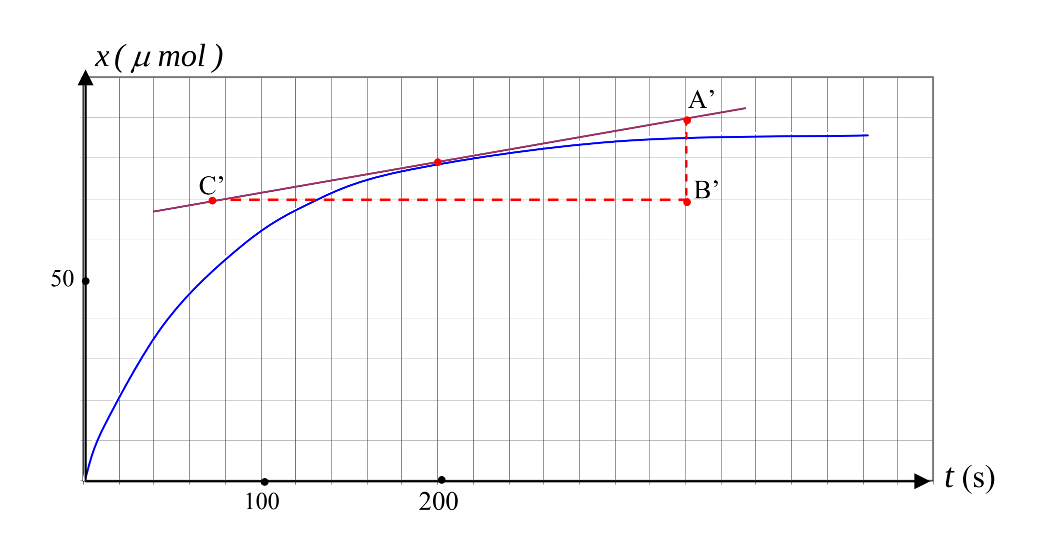
$$v = 5{,}7\times10^{-6}\,mol.L^{-1}.s^{-1}$$

السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t' = 200$ s :

$$v' = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{V}\frac{A'B'}{C'B'}$$

$$v' = \frac{1}{82\times10^{-3}}\frac{20\times10^{-6}}{270}$$

$$v' = 9{,}0\times10^{-7}\,mol.L^{-1}.s^{-1}$$



13 - السرعة الحجمية للتفاعل في اللحظة $t = 200$ s أصغر من السرعة في اللحظة $t' = 60$ s . تناقص السرعة سببه تناقص تراكيز المتفاعلات خلال الزمن .

الذي يوضح ذلك بيانيا هو تناقص ميل المماس كلما زاد الزمن ، إلى أن يصبح هذا الميل معدوما عندما يصبح المماس أفقيا .

التمرين 23

معادلة التحوّل الكيميــائي : $3\,HNO_{2\,(aq)} \rightarrow 2\,NO_{(g)} + H_3O^+_{(aq)} + NO_3^-{}_{(aq)}$

1 – جدول التقدم (أسفل الصفحة)

لدينا في اللحظة t كمية مادة حمض الأزوتيد هي :

$n(HNO_2) - 3x$ ، ومنه التركيز المولي هو :

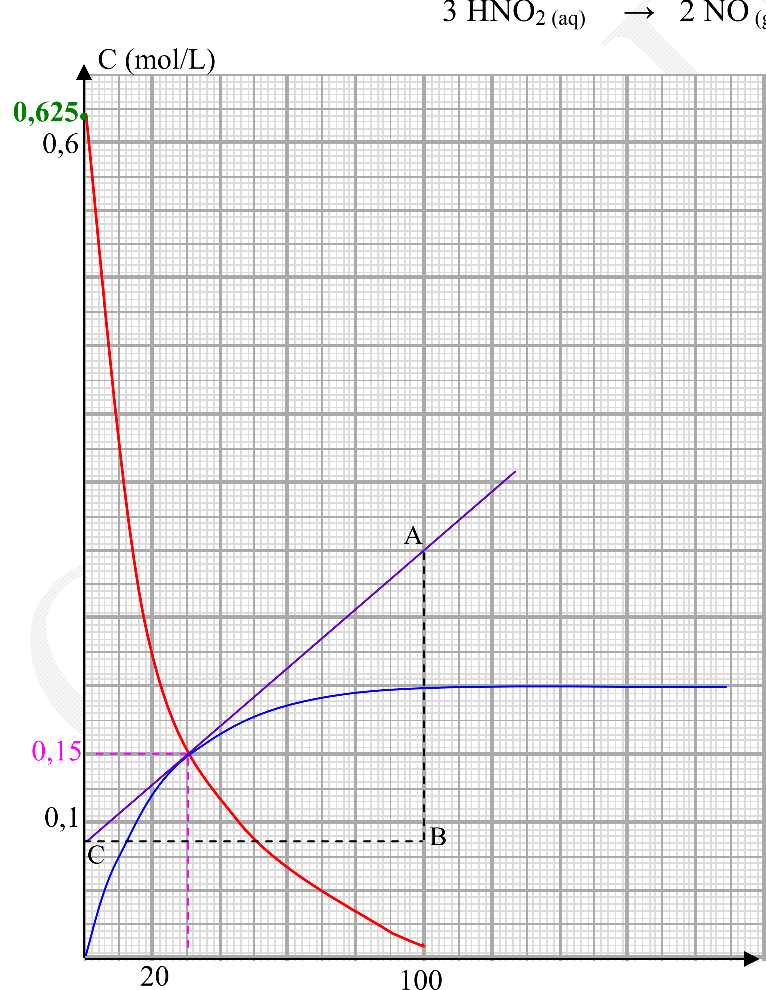
$$[HNO_2] = \frac{n_0(HNO_2)}{V} - \frac{3x}{V}$$

$$[HNO_2] = C_0 - \frac{3x}{V} \qquad (1)$$

أما كمية مادة شاردة النترات (NO_3^-) فهي :

$n(NO_3^-) = x$ ، ومنه التركيز المولي لهذه الشاردة :

$$[NO_3^-] = \frac{x}{V} \qquad (2)$$



معادلة التفاعل		$3\ HNO_{2\ (aq)}$ $\rightarrow$	$NO_{(g)}$ +	$H_3O^+_{\ (aq)}$ +	$NO_3^-{}_{(aq)}$
حالة الجملة	التقدم	كمية المـــادة بـ (mol)			
الحالة الابتدائية	0	$n_0\ (HNO_2)$	0	0	0
الحالة الانتقالية	x	$n_0\ (HNO_2) - 3\ x$	x	x	x
الحالة النهائية	x_{max}	$n_0\ (HNO_2) - 3\ x_{max}$	x_{max}	x_{max}	x_{max}

2 – السرعة الحجمية للتفاعل هي مفهوم له علاقة مباشرة مع الزمن ، وتتمثّل في مشتق التقدّم بالنسبة للزمن في وحدة الحجم .

أي : $v = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$

• بالنسبة للمنحني $f\,(t)$ ، فهو يمثّل اختفاء حمض الأزوتيد HNO_2 خلال الزمن . نرمز لسرعة الاختفاء بـ v_d ، ونكتب :

$v_d = -\dfrac{d\,[HNO_2]}{dt}$ ، وباستعمال العلاقة (1) تصبح السرعة : $v_d = -\dfrac{dC_0}{dt} + \dfrac{3}{V}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{V}\dfrac{dx}{dt}$ (مشتق عدد ثابت يساوي 0)

وبالتالي نكتب $v_d = 3v_x$ ، حيث v_x هي سرعة الحجمية للتفاعل ، ومنه $v_x = \dfrac{v_d}{3}$ (3)

إذن يمكن معرفة السرعة الحجمية للتفاعل من البيان f (t) .

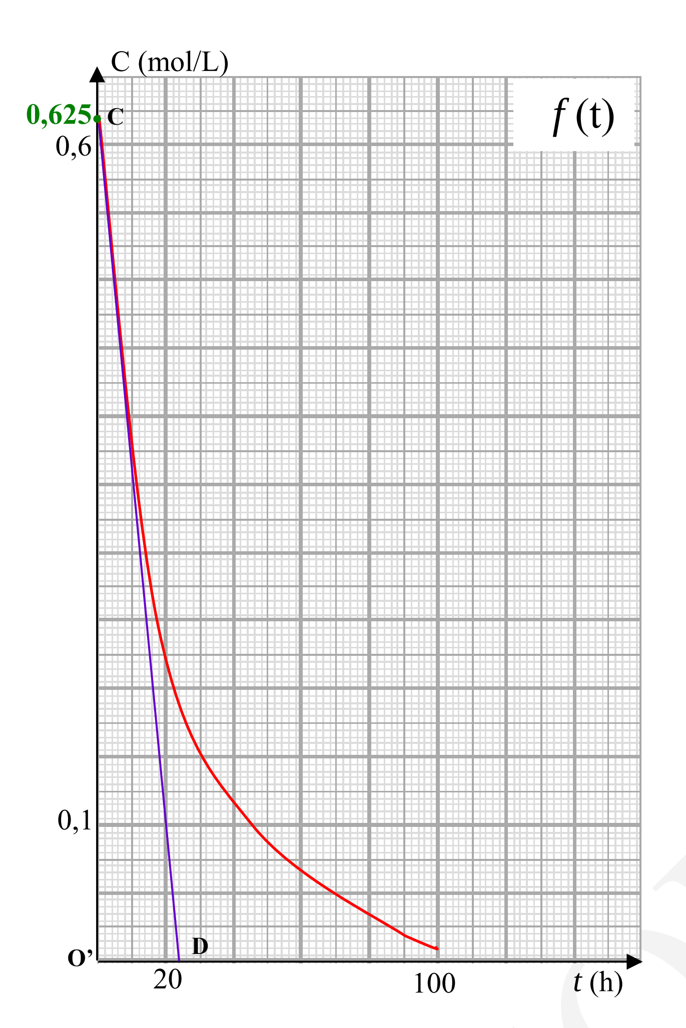
• بالنسبة للمنحني g (t) ، فهو يمثّل تشكل شاردة النترات خلال الزمن . نرمز لسرعة التشكل بـ v_a ، ونكتب :

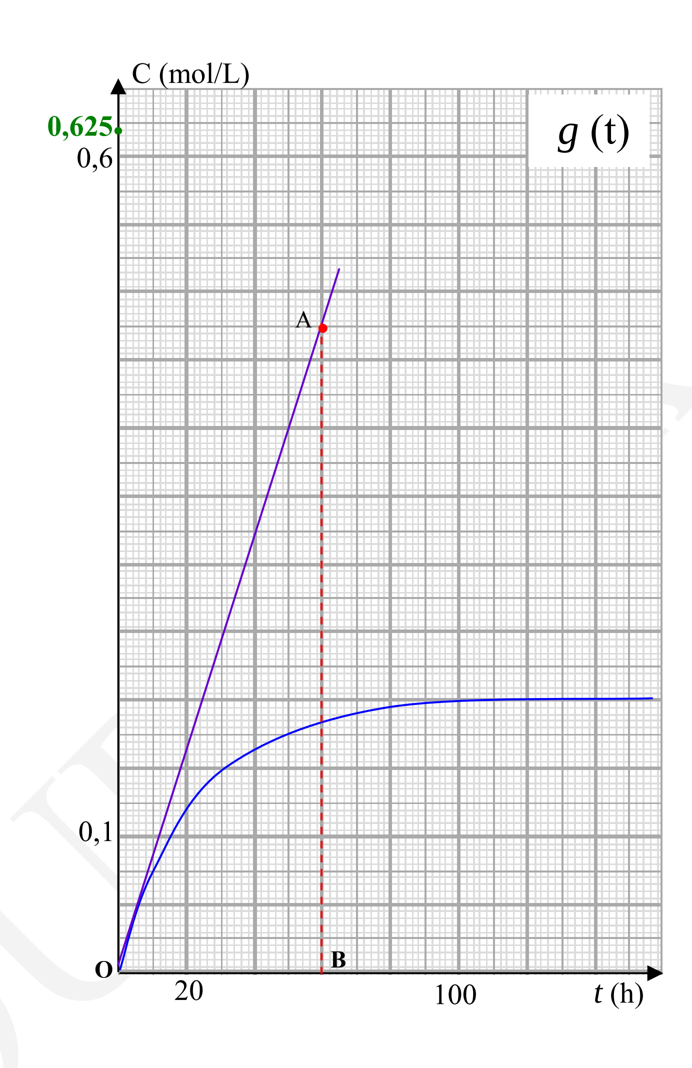
$v_a = \dfrac{d\left[NO_3^-\right]}{dt}$ ، وباستعمال العلاقة (2) تصبح السرعة : $v_a = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$

وبالتالي نكتب $v_x = v_a$ (4)

إذن يمكن معرفة السرعة الحجمية للتفاعل من البيان g (t) .

3 - السرعة الحجمية الإبتدائية للتفاعل (v_0) : نحسبها بيانيا في اللحظة $t = 0$ إما من البيان f (t) أو $g\ (t)$





من البيان g (t) :

سرعة ظهور شاردة النترات هي :

$$v_a = \frac{d\left[NO_3^-\right]}{dt} = \frac{AB}{OB} = \frac{9{,}6 \times 0{,}05}{60} = 8{,}0 \times 10^{-3}\, mol.L^{-1}.h^{-1}$$

باستعمال العلاقة (4) نجد السرعة الحجمية للتفاعل $v_0 = v_x = 8{,}0 \times 10^{-3}\, mol.L^{-1}.h^{-1}$

من البيان f (t) :

سرعة اختفاء حمض الأزوتيد هي :

$$v_a = -\frac{d\,[HNO_2]}{dt} = -(-\frac{O'C}{O'D}) = +\frac{0{,}625}{25} = 2{,}5 \times 10^{-2}\, mol.L^{-1}.h^{-1}$$

باستعمال العلاقة (3) نجد السرعة الحجمية للتفاعل $v_0 = v_x = \frac{2{,}5 \times 10^{-2}}{3} = 8{,}3 \times 10^{-3}\, mol.L^{-1}.h^{-1}$

السرعتان متساويتان في حدود أخطاء التمثيل البياني .

4 - نقطة تقاطع البيانين توافق : $[HNO_2] = [NO_3^-] = 0{,}15\ mol.L^{-1}$

ومن معادلة التحول نستنتج : $[H_3O^+] = 0{,}15\ mol.L^{-1}$ و $[NO] = 2 \times 0{,}15 = 0{,}3\ mol.L^{-1}$

حجم المزيج غير معروف

السرعة الحجمية للتفاعل عند اللحظة t_1 : $v'_x = v'_a = \frac{AB}{CB} = \frac{4{,}3 \times 0{,}05}{100} = 2{,}1 \times 10^{-3}\, mol.L^{-1}.h^{-1}$

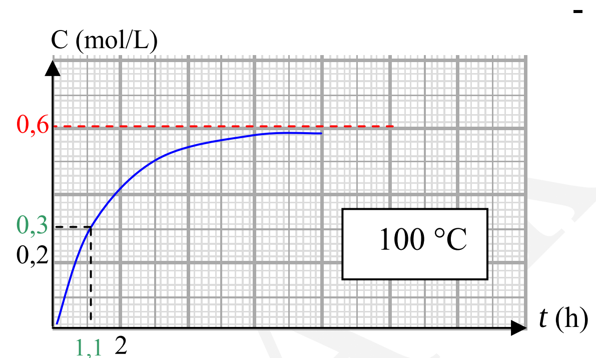
5 - السرعة تتناقص بسبب تناقص التركيز المولي لحمض الأزوتيد .

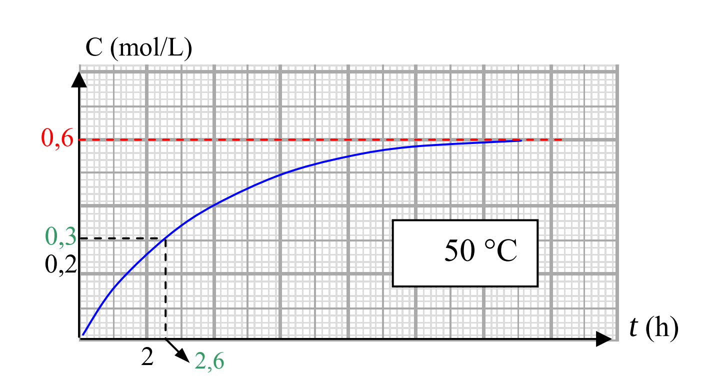
6 – نعتبر التحول قد انتهى في اللحظة $t = 100$ h ، وعندها تنعدم السرعة الحجمية للتفاعل .

التمرين 24

معادلة التحول : A + B → C + D

- 1





A	+	B	→	C	+	D
n_A				0		
$n_A - x$				x		

لدينا في اللحظة t : $x = [C].V$ ، فمن أجل قيمتين لـ x ، x_1 و x_2 نكتب : $x_1 = [C_1]V$ ، $x_2 = [C_2]V$

فإذا كان $x_2 = \dfrac{x_1}{2}$ ، فإن كذلك بتقسيم العلاقتين طرفا لطرف يكون $[C_2] = \dfrac{[C_1]}{2}$.

إذن لكي نحسب زمن نصف التفاعل يكفي أن نقسم التركيز الأعظمي للنوع الكيميائي C على 2 ونستنتج $t_{1/2}$ من بيان التركيز .

2 – كلما كان زمن نصف التفاعل أقل تكون سرعة التفاعل عند $t = 0$ أكبر ، أي أن كلما كانت درجة حرارة المزيج أكبر كلما كان التحول أسرع . (درجة الحرارة عامل حركي)

التمرين 25

1 - أ) سبب تحول اللون البنفسجي لعديم اللون هو تفاعل شاردة البرمنغنات وتحولها لشاردة المنغنيز Mn^{2+} عديمة اللون . أما سبب زوال اللون ، فيجب أن نبيّن أن شاردة البرمنغنات هي المتفاعل المحدّ .

كمية مادة البرمنغنات :

$n(MnO_4^-) = [MnO_4^-]\,V_1 = 0,2 \times 0,2 \times 10^{-3} = 4,0 \times 10^{-5}$ mol ، حيث V_1 هو حجم برمنغنات البوتاسيوم .

كمية مادة حمض الأكساليك :

$n(H_2C_2O_4) = [H_2C_2O_4]\,V_2 = 0,2 \times 0,005 = 1,0 \times 10^{-3}$ mol ، حيث V_2 هو حجم حمض الأوكساليك .

معادلة التحوّل الكيميائي هي :

$$2\,MnO_4^-{}_{(aq)} + 6\,H^+{}_{(aq)} + 5\,H_2C_2O_4{}_{(aq)} \rightarrow 2\,Mn^{2+}{}_{(aq)} + 10\,CO_2{}_{(g)} + 8\,H_2O_{(l)}$$

المتفاعلان	$2\ MnO_4^-{}_{(aq)}$	$+\ 5\ H_2C_2O_4\,_{(aq)}$
$t=0$	$4{,}0\times10^{-5}$	10^{-3}
t	$4\times10^{-5}-2x$	$10^{-3}-5x$

$$4\times10^{-5}-2x=0 \Rightarrow x=2\times10^{-5}\,mol$$

$$10^{-3}-5x=0 \Rightarrow x=2\times10^{-4}\,mol$$

إذن المتفاعل المحد هو برمنغنات البوتاسيوم (أصغر قيمة للتقدم)

ونستنتج من هذا أن الكمية المضافة (0,2 mL) تختفي كلها عند إضافتها

ب) السرعة الحجمية الوسطية (المتوسطة) المقصودة هي : $v=\dfrac{1}{V}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ (1)

لدينا $n(MnO_4^-)-2x=0$ ، هذه العلاقة صحيحة بين أية لحظتين زونيتين ، ومنه : $x=\dfrac{1}{2}n(MnO_4^-)$ ، وبالتالي

$\Delta x=\dfrac{1}{2}\Delta n(MnO_4^-)$. بالتعويض في العلاقة (1) نجد : $v=\dfrac{1}{2V}\dfrac{\Delta(MnO_4^-)}{\Delta t}$

$v=\dfrac{1}{2\times0{,}2}\left|\dfrac{0-4\times10^{-5}}{45}\right|=2{,}2\times10^{-6}\,mol.L^{-1}s^{-1}$ (أهملنا الحجم 0,2 mL أمام 200 mL) .

2 – بعد زوال اللون البنفسجي وجدنا $x=2\times10^{-5}\,mol$ وهي نفسها التقدم الأعظمي ، حينئذ تكون كمية مادة حمض الأكساليك الباقية في المزيج : $n(H_2C_2O_4)-5x=10^{-3}-5\times2\times10^{-5}=9{,}0\times10^{-4}\,mol$ ، أما التركيز المولي للحمض هو :

$$[H_2C_2O_4]=\frac{9\times10^{-4}}{0{,}2}=4{,}5\times10^{-3}\,mol/L$$

3 - أ) $v'=\dfrac{1}{2V}\dfrac{\Delta(MnO_4^-)}{\Delta t}=\dfrac{1}{2\times0{,}2}\left|\dfrac{0-4\times10^{-5}}{28}\right|=3{,}57\times10^{-6}\,mol.L^{-1}s^{-1}$

ب) نلاحظ أن $v'>v$ ، وهذا لا يكون ممكنا في تفاعل عادي لأن تناقص التركيز يؤدّي إلى تناقص السرعة ، لكن في هذا التحول حدث ما يلي : في التجربة الثانية (الإضافة الثانية) كانت هناك كمية من شوارد المنغنيز Mn^{2+} الناتجة عن الإضافة الأولى ، وهذه الشوارد كانت سببا في تحفيز التفاعل (التحفيز الذاتي في هذه الحالة) . وهذا ما جعل السرعة في التجربة الثانية أكبر من السرعة في التجربة الأولى .

4 – في هذه الحالة (أي التجربة الثانية) يتدخّل عاملان حركيان هما التحفيز ودرجة الحرارة ، لهذا تكون السرعة أكبر ولا يدوم التحول إلا ثانية واحدة .

التمرين 26

معادلة التحلل : $2\,H_2O_{2\,(l)} \rightarrow 2\,H_2O_{(l)} + O_{2\,(g)}$

1 – دون الوسيط يكون التفاعل بطيئا ، وخاصة في درجة حرارة منخفضة .

2 – في هذا التحوّل لدينا وساطة متجانسة ، أي أن الوسيط والمتفاعلات من نفس الحالة الفيزيائية (سوائل) .

للعلم فقط أن في حالة الوساطة المتجانسة يظهر الناتج في جميع أنحاء البيشر ، أما في الوساطة غير المتجانسة يظهر الناتج بجوار الوسيط .

يمكن تحفيز هذا التفاعل بواسطة سلك من البلاتين (وساطة غير متجانسة) بحيث نلاحظ انطلاق غاز الأكسجين بجوار السلك فقط .


المرحلة 3


المرحلة 4

3 – الشيء الذي يوضّح أن الوسيط قد شارك في التفاعل هو صورة المرحلة (3) - اللون البنّي والفوران

الفوران : انطلاق ثنــائي الأكسجين

اللون البني: ناتج عن المركبات المعقدة التي يمر بها الوسيط وهو يسرّع في التفاعل ، حيث أنه يغيّر آلية (ميكانيزم) التفاعل .

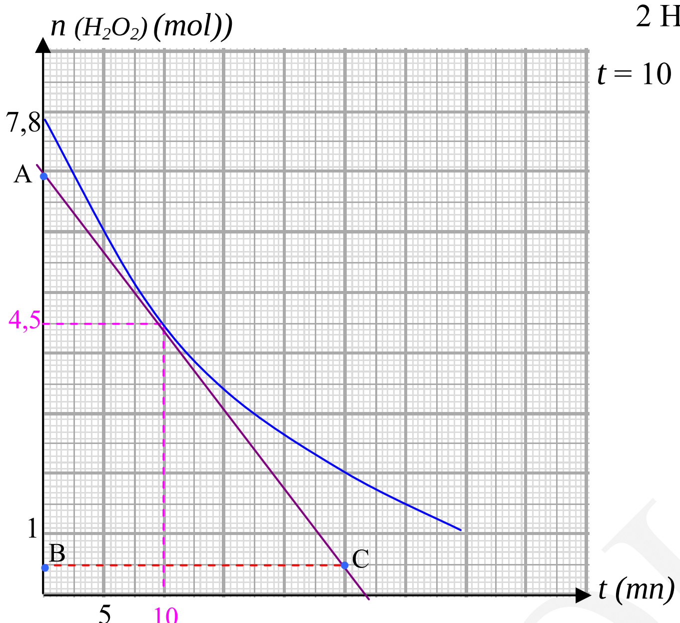
4 – المعلومة المتعلّقة بالوسيط التي تبرزها الصورة نرصدها في صورة المرحلة 4 ، بحيث أن هذا اللون الأصفر الصدئي هو لون شوارد الحديد الثلاثية . يدلّ هذا على أن الوسيط أنهى مهمته وعاد إلى لونه الطبيعي (الأصلي) .

التمرين 27

معادلة التحوّل الكيميـائي : $2\,H_2O_{2\,(aq)} \rightarrow 2\,H_2O_{(l)} + O_{2\,(g)}$

1 - أ) من البيان نستنتج كمية مادة الماء الأكسجيني الموافقة لـ $t = 10$ mn

$n\,(H_2O_2) = 4,5$ mol



معادلة التفاعل	$2\,H_2O_{2\,(l)} \rightarrow$	$2\,H_2O_{(l)}$ +	$O_{2\,(g)}$
$t = 0$	$n_0\,(H_2O_2)$	0	0
t	$n_0\,(H_2O_2) - 2x$	$2\,x$	x

ب) في اللحظة t تكون كمية مـادة الماء الأكسوجيني:

$$n_0\,(H_2O_2) - 2x = 4,5$$

$x = 1,65\;mol$ ، ومنه كمية مادة ثنائي الأكسوجين هي :

$n\,(H_2O) = 2 \times 1,65 = 3,3$ mol ، $n\,(O_2) = 1,65$ mol

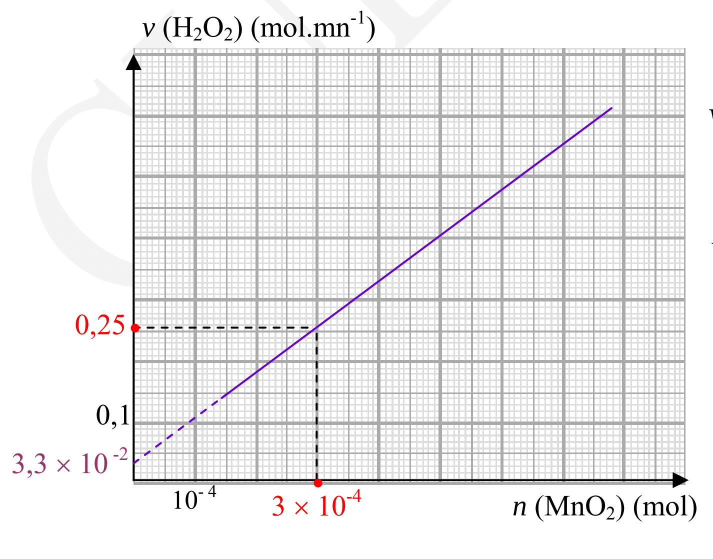
ومنه التركيب المولي للمزيج : $\{\, n\,(H_2O) = 3,3 \text{ mol} ،\; n\,(O_2) = 1,65 \text{ mol} ،\; n\,(H_2O_2) = 4,5 \text{ mol} \,\}$

جـ) سرعة اختفاء المــاء الأكسوجيني :

$$v = -\frac{d\,n\,(H_2O_2)}{dt} = -(-\frac{AB}{BC}) = \frac{6,3}{25} = 2,5 \times 10^{-1}\,mol.mn^{-1}$$

2 - أ) نقطة تقاطع بيـان سرعة اختفـاء الماء الأكسوجيني مع محور التراتيب هي السرعة في غيـاب الوسيط .

$$v = 3,3 \times 10^{-2}\,mol.mn^{-1}$$



ب) لإيجاد كمية مادة الوسيط المستعملة في السؤال 1- ،

نستعمل بيان السرعة ونأخذ القيمة الموافقة لـ $v = 0,25$ mol.mn^{-1}

وهي : $n\,(MnO_2) = 3 \times 10^{-4}$ mol

جـ) كلما استعملنا كمية أكبر من الوسيط نحصل على سرعة أكبر في اللحظة $t = 0$.

التمرين 28

معـادلة التحوّل : $S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} + 2\,I^-{}_{(aq)} \rightarrow 2\,SO_4^{2-} + I_{2\,(aq)}$

1 - السرعة الحجمية للتفاعل هي مفهوم له علاقة مباشرة مع الزمن ، وتتمثّل في مشتق التقدّم بالنسبة للزمن في وحدة الحجم .

أي : $v = \dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$

معادلة التفاعل	$S_2O_8^{2-}{}_{(aq)} + 2\,I^-{}_{(aq)} \rightarrow 2\,SO_4^{2-} + I_{2\,(aq)}$	
t = 0	$n_0\,(S_2O_8^{2-})$	
t	$n_0\,(S_2O_8^{2-}) - x$	

لدينا كمية مادة $S_2O_8^{2-}$ في اللحظة t هي : $n_0\,(S_2O_8^{2-}) - x$ ، ومنه : $\left[S_2O_8^{\,2-}\right] = \dfrac{n_0\,(S_2O_8^{2-}) - x}{V}$

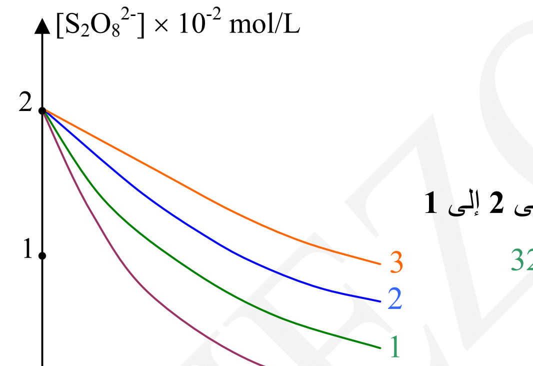
باشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن : $\dfrac{d\left[S_2O_8^{\,2-}\right]}{dt} = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{d\,n_0(S_2O_8^{\,2-})}{dt} - \dfrac{dx}{dt}\right) = -\dfrac{1}{V}\dfrac{dx}{dt}$ (مشتق عدد ثابت = 0)

وبالتالي سرعة التفاعل بدلالة تركيز شاردة البروكسوثنائي كبريتات هي : $v = -\dfrac{d\left[S_2O_8^{\,2-}\right]}{dt}$

2 - ملاحظة خاصة بالمعطيات : في التجارب الأربعة استعملنا الوسيط فقط في التجربة الرابعة ، إجلاء للغموض في نص التمرين الذي يوحي أن كل التجارب اُستُعمل فيها الوسيط ، مع الإشــارة إلى أن شوارد الحديد الثنائية كافية لتحفيز هذا التفاعل .

المقصود في السؤال تعيين التركيز المولي عند اللحظة $t = 0$ لشوارد $S_2O_8^{2-}$ ،

وهذا التركيز هو الموجود على البيان $[S_2O_8^{2-}] = 2 \times 10^{-2}$ mol/L .



-3

سرعة اختفاء شوارد $S_2O_8^{2-}$ تتزايد عند $t = 0$ بالقيمة المطلقة من التجربة **3** إلى **2** إلى **1**

لأن درجة الحرارة في هذه التجارب تتزايد من 15°C إلى 23°C إلى 32°C

التجربة 4 أُجريت في نفس درجة حرارة التجربة 1 ، لكن بوجود وسيط ، إذن في هذه التجربة تكون أكبر سرعة لإختفاء شوارد $S_2O_8^{2-}$.

4 - العوامل الحركية التي تبرزها هذه التجارب هي :

التجربة **1** : درجة الحرارة

التجربة **2** : درجة الحرارة

التجربة **3** : درجة الحرارة

التجربة **4** : درجة الحرارة + الوسيط (شوارد Fe^{2+}) .

5 – نلاحظ على البيان أن كمية المادة المختفية من شوارد $S_2O_8^{2-}$ تكون معتبرة في مدة قصيرة إذا ما قورنت بالمدة اللازمة لإجراء المعايرة ، لهذا يجب إيقاف التفاعل للتمكن من المعايرة ، وذلك بوضع العيّنة المعايَرة في ماء الثلج .

(لهذا يجب أن نعرّف السرعة و البطء في التفاعلات بنسْبها إلى المدة المستغرقة في تقنية المتابعة)

التمرين 29

معادلة التحوّل الكيميــائي: $H_2O_{2\,(l)} + 2\,H^+_{(aq)} + 2\,I^-_{(aq)} \rightarrow 2\,H_2O_{(l)} + I_{2\,(aq)}$

1 – أ)

$[I_2]$ (mmol.L^{-1})
2
5
30
t (mn)
a
b
c

	محلول H_2SO_4 1 mol.L^{-1}	محلول KI 0,1 mol.L^{-1} الحجم V_2	H_2O_2 0,1 mol.L^{-1} الحجم V_1	H_2O
الخليط *a* 30 mL	10 mL	18 mL	2 mL	0
الخليط *b* 40 mL	10 mL	10 mL	10 mL	10 mL
الخليط *c* 30 mL	10 mL	10 mL	1 mL	9 mL

المقصود بالتركيز المولي الابتدائي هو التركيز المولي في المزيج في اللحظة $t = 0$. من أجل حسابه ، نحسب أولا عدد المولات في كل محلول ثم نقسم على حجم المزيج (الخليط) .

الخليط (a) :

التركيز المولي $[H_2O_2]_0$: لدينا : $n\,(H_2O_2) = [H_2O_2] \times V_1 = 0,1 \times 2 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-4}$ mol ، أما التركيز المولي الإبتدائي فهو : $[H_2O_2]_0 = \dfrac{n(H_2O_2)}{\Sigma V} = \dfrac{2\times10^{-4}}{30\times10^{-3}} = 6,7\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$

التركيز المولي $[I^-]_0 = [KI]_0$: لدينا : $n\,(I^-) = [I^-] \times V_2 = 0,1 \times 18 \times 10^{-3} = 1,8 \times 10^{-3}$ mol ، أما التركيز المولي الإبتدائي فهو : $[I^-]_0 = \dfrac{n(I^-)}{\Sigma V} = \dfrac{1,8\times10^{-3}}{30\times10^{-3}} = 6,0\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$

الخليط (b) :

التركيز المولي $[H_2O_2]_0$: لدينا : $n\,(H_2O_2) = [H_2O_2] \times V_1 = 0,1 \times 10 \times 10^{-3} = 1,0 \times 10^{-3}$ mol ، أما التركيز المولي الإبتدائي فهو : $[H_2O_2]_0 = \dfrac{n(H_2O_2)}{\Sigma V} = \dfrac{10^{-3}}{40\times10^{-3}} = 2,5\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$

التركيز المولي $[I^-]_0$: لدينا : $n\,(I^-) = [I^-] \times V_2 = 0,1 \times 10 \times 10^{-3} = 1,0 \times 10^{-3}$ mol ، أما التركيز المولي الإبتدائي فهو : $[I^-]_0 = \dfrac{n(I^-)}{\Sigma V} = \dfrac{10^{-3}}{40\times10^{-3}} = 2,5\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$

الخليط (c) :

التركيز المولي $[H_2O_2]_0$: لدينا : $n\,(H_2O_2) = [H_2O_2] \times V_1 = 0,1 \times 1 \times 10^{-3} = 1,0 \times 10^{-4}$ mol ، أما التركيز المولي الإبتدائي فهو : $[H_2O_2]_0 = \dfrac{n(H_2O_2)}{\Sigma V} = \dfrac{10^{-4}}{30\times10^{-3}} = 3,3\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$

التركيز المولي $[I^-]_0$: لدينا : $n\,(I^-) = [I^-] \times V_2 = 0,1 \times 10 \times 10^{-3} = 1,0 \times 10^{-3}$ mol ، أما التركيز المولي الابتدائي فهو $[I^-]_0 = \dfrac{n(I^-)}{\Sigma V} = \dfrac{10^{-3}}{30\times10^{-3}} = 3,3\times10^{-2}\,mol.L^{-1}$

ب) المتفاعل المحدّ في كل خليط :

	$H_2O_{2\,(l)}$ +	$2\,H^+_{(aq)}$ +	$2\,I^-_{(aq)}$ →	$2\,H_2O_{(l)}$ +	$I_{2\,(aq)}$
$t = 0$	$n\,(H_2O_2)$	$n\,(H^+)$	$n\,(I^-)$		0
t	$n\,(H_2O_2) - x$	$n\,(H^+) - 2x$	$n\,(I^-) - 2x$		x

كمية مادة كل متفاعل في كل خليط :

$n\,(H^+) = 2\,n\,(H_2SO_4) = 2 \times 1 \times 10 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-2}$ mol

$n\,(I^-)$ (mol)	$n\,(H^+)$ (mol)	$n\,(H_2O_2)$ (mol)	الخليط
18×10^{-4}	2×10^{-2}	2×10^{-4}	a
10^{-3}	2×10^{-2}	10^{-3}	b
10^{-3}	2×10^{-2}	10^{-4}	c

لكي نعيّن المتفاعل المحد في كل خليط ، نعدم كمية مادة كل متفاعل في اللحظة t ، وتكون أصغر قيمة لـ x موافقة للمتفاعل المحدّ .

الخليط a :

$$\begin{cases} 2\times10^{-4} - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 2{,}0\times10^{-4}\,mol \\ 18\times10^{-4} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 9{,}0\times10^{-4}\,mol \\ 2\times10^{-2} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1{,}0\times10^{-2}\,mol \end{cases}$$

⇐ المتفاعل المحدّ هو H_2O_2

الخليط b :

$$\begin{cases} 10^{-3} - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10^{-3}\,mol \\ 10^{-3} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 5{,}0\times10^{-4}\,mol \\ 2\times10^{-2} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10^{-2}\,mol \end{cases}$$

⇐ المتفاعل المحدّ هو I^-

الخليط c :

$$\begin{cases} 10^{-4} - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10^{-4}\,mol \\ 10^{-3} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 5{,}0\times10^{-4}\,mol \\ 2\times10^{-2} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 10^{-2}\,mol \end{cases}$$

⇐ المتفاعل المحدّ هو H_2O_2

2 – التركيز المولي النهائي لثنائي اليود في كل خليط : نعلم أن $n\,(I_2) = x$. إذن من أجل كل خليط نقسم قيمة x على حجم المزيج .

الخليط a : $[I_2]_f = \dfrac{2\times10^{-4}}{30\times10^{-3}} = 6{,}7\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ ، أو من البيان

الخليط b : $[I_2]_f = \dfrac{5\times10^{-4}}{40\times10^{-3}} = 12{,}5\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ ، البيان لا يوافق

الخليط c : $[I_2]_f = \dfrac{10^{-4}}{30\times10^{-3}} = 3{,}3\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$ ، أو من البيـان

3 – نفس القيم نجدها عند اللحظة t = 30 mn ، لأن سرعة تشكل ثنائي اليود تكون معدومة عند هذه اللحظة (المماس أفقي) .

الجزء الأول

التمرين 01

يُعطى نصف القطر التقريبي لأي نواة بالعلاقة $R = r_0\sqrt[3]{A}$ ، حيث r_0 هو ثابت بالنسبة لكل الأنوية وقيمته $r_0 = 1,3\ fm$

نصف قطر نواة النحـاس $R = 1,3\sqrt[3]{64} = 5,2\ fm = 5,2\times10^{-15}\ m$

إذا كان نصف قطر نواة هو $3,7 \times 10^{-15}$ m فإن قيمة العدد الكتلي هي $A = \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 = \left(\frac{3,7}{1,3}\right)^3 = 23$

التمرين 02

• **وصف التجربة** :
وُضعت في التجربة داخل جفنة محصنّة مادة مشعة تُصدر الجسيمات α ، ثم وُجّهت نحو ورقة ذهب رقيقة جدا سمكها حوالي $0,6\ \mu\ m$
ووُضع وراء ورقة الذهب شاشة مطلية بكبريت التوتياء ZnS ، بحيث إذا سقطت عليها الجسيمات α تبْرُق .
الملاحظة : جزء كبير من الجسيمات α تعبر ورقة الذهب وتسقط على الشاشة أفقيا وجزء صغير (حوالي 0,01%) تنحرف عن مسـارها عند ملاقاة ورقة الذهب .
استعمل روذرفورد مادة الذهب ، لأن بواسطة هذا المعدن يمكن صناعة صفائح رقيقة جدا على غرار باقي المعادن الأخرى . أما سبب وضع صفيحة رقيقة جدا هو حتى لا نترك التعقيب على نتيجة التجربة بفعل سمك الصفيحة .
• **النتيجة** : المادة فارغة تقريبا ، والذرة تحتوي على نواة موجبة .

• قيمة قطر نواة الذهب $D = 2\ R$ ، ولدينا : $R = 1,3\sqrt[3]{197} = 1,3\times5,82 = 7,56\ fm$ مع العلم أن ^{197}Au

ومنه قطر نواة الذهب هو $D = 2 \times 7,56 = 15,12\ fm$

لحساب نصف قطر ذرة الذهب ، نحسب أولا حجم الذرة والتي نعتبرها كرة نصف قطرها R' ، حيث $V = \frac{4}{3}\pi R'^3$ (1)

لدينا الكتلة الحجمية للذهب $\rho = 19,3\ g/cm^3$ ، ولدينا $V = \frac{m}{\rho} = \frac{197\times1,67\times10^{-24}}{19,3} = 1,7\times10^{-23}\ cm^3$

باستخراج R من العلاقة (1) والتعويض نجد $R' = \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3\times1,7\times10^{-23}}{12,56}} = 1,6\times10^{-8} = 1,6\times10^{5}\ fm$

$D' = 1,6 \times 10^5 \times 2 = 3,2 \times 10^5$ fm ، $\frac{D'}{D} \approx 21164$

نلاحظ أن قطر ذرة الذهب أكبر بحوالي 21164 مرة من قطر نواة الذهب .

ملاحظة : رتبة هذا المقدار محققة في جميع الذرات .

التمرين 03

1 – يوجد ما لا يقل عن 17 نظير للبوتاسيوم ، من بينها 3 نظائر طبيعية فقط وهي ^{39}K و ^{40}K و ^{41}K .

نذكر 5 نظائر ، ولتكن : ^{39}K ، ^{40}K ، ^{41}K ، ^{34}K ، ^{46}K .

2 – النواة $^{40}_{20}X$ لا تمثل نظيرا للبوتاسيوم ، لأن نواة البوتاسيوم هي $^{A}_{19}K$.

3 – المقصود بالوفرة النظائرية هي النسبة المئوية لكل نظير . لتكن x_1 و x_2 هي النسب المئوية للنظيرين ^{39}K و ^{41}K على الترتيب

إذن نكتب : $M_K = 40{,}96 = 39 \times \frac{x_1}{100} + 41 \times \frac{x_2}{100}$

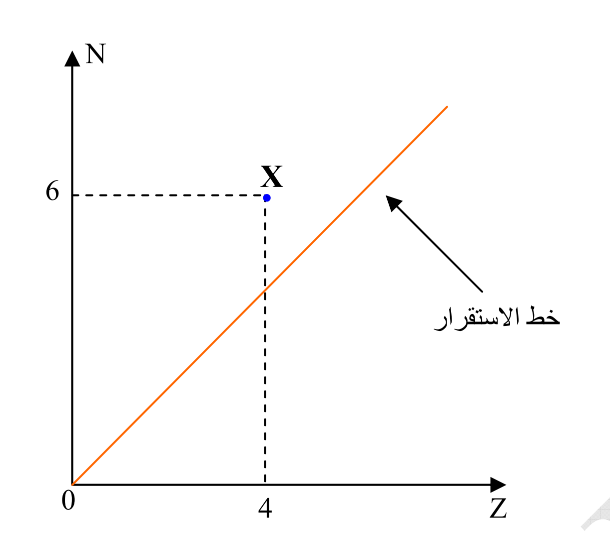
$x_1 + x_2 = 100$

$$\begin{cases} 40{,}96 = 0{,}39\, x_1 + 0{,}41\, x_2 \\ x_1 + x_2 = 100 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد $x_1 = 2\ \%$ و $x_2 = 98\ \%$ وهما وفرة النظيرين ^{39}K و ^{41}K على الترتيب .

التمرين 04

العنصر	He الهيليوم	Li الليثيوم	Be البريليوم	B البور	C الكربون
قيمة Z	2	3	4	5	6





1 - X نظير للبيريليوم لأن لهما نفس العدد Z .

2 – النواة X غير مستقرة لأنها بعيدة عن خط الاستقرار الذي يشمل الأنوية التي لها $Z < 20$.

3 - نمط التفكك الذي يحدث لها هو β^- .

4 - $^{10}_{4}Be \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{10}_{5}B$

التمرين 05

1 - $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He$

2 - $^{12}_{7}N \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{0}_{1}e$

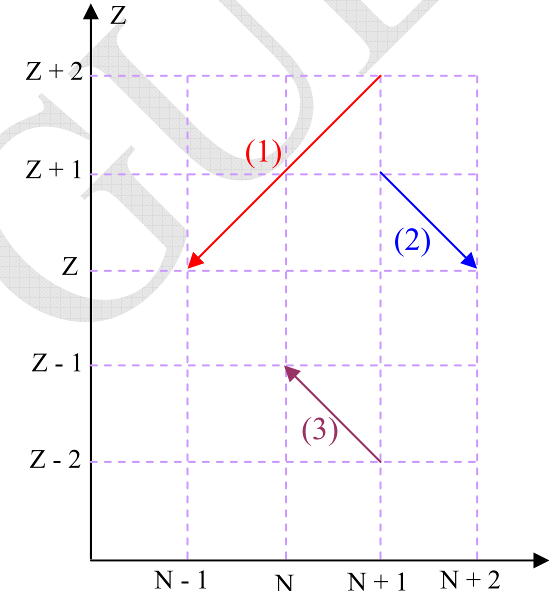
3 - $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$

4 - $^{174}_{73}Ta \rightarrow {}^{174}_{72}Hf + {}^{0}_{1}e$

5 - $^{213}_{84}Po \rightarrow {}^{209}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$

6 - $^{174}_{72}Hf \rightarrow {}^{170}_{70}Yb + {}^{4}_{2}He$

التمرين 06



– 1

النمط (1) هو α لأن عدد النوترونات نقص بـ 2 وعدد البروتونات نقص بـ 2 .

النمط (2) هو β^+ لأن عدد النوترونات ازداد بـ 1 وعدد البروتونات نقص بـ 1

النمط (3) هو β^- لأن عدد النوترونات نقص بـ 1 وعدد البروتونات ازداد بـ 1

2 - ميزة هذه الأنوية المستقرّة هي وجود توازن بين عدد بروتوناتها ونيوتروناتها ، أي الفرق ضئيل بين عدد بروتوناتها وعدد نوتروناتها ($^{23}_{12}Mg$) ، وفي بعضها يكون عدد البروتونات يساوي عدد النوترونات ($^{40}_{20}Ca$) .

- 3

نلاحظ في مخطط Segrè $N = f(Z)$ أن النظير $^{152}_{70}Yb$ يوجد أسفل وادي الاستقرار ، لهذا يتفكك حسب النمط β^+ لكي يعطي نواة إبن قريبة نسبيا من وادي الاستقرار $^{152}_{70}Yb \rightarrow ^{152}_{69}Tm + ^{0}_{1}e$

4 – النواة الإبن ($^{152}_{69}Tm$) مشعة لأنها بعيدة عن وادي الاستقرار ، يمكنها أن تفكك بالنمط β^+ ثم α .....

5 - يوجد $^{139}_{54}Xe$ و $^{98}_{38}Sr$ فوق وادي الاستقرار في مخطط Segrè $N = f(Z)$ ، لهذا تتفككان حسب النمط β^- .

التمرين 07

نقلنا البيان على الجدول .

زمن نصف العمر غير مطلوب في التمرين (إضافة فقط)

ملاحظة :

البيزموت (^{214}Bi) يمكن أن يمر إلى التاليوم (^{210}Ti) بالتفكك α ثم إلى الرصاص (^{210}Pb) بواسطة التفكك β^-

1 – نمط الإشعاع موجود على الجدول .

2 – العناصر الناقصة في المخطط مكتوبة باللون الأحمر في الجدول .

عــائلة اليورانيوم		
العنصر	زمن نصف العمر	نمط التفكك
Uranium - 238	4,468 milliards d'années	α
Thorium - 234	24,10 jours	β⁻
Protactinium - 234	6,70 heures	β⁻
Uranium - 234	245 500 ans	α
Thorium - 230	75 380 ans	α
Radium - 226	1600 ans	α
Radon - 222	3,8235 jours	α
Polonium - 218	3,10 minutes	α
Plomb - 214	26,8 minutes	β⁻
Bismuth - 214	19,9 minutes	β⁻
Polonium - 214	164,3 microsecondes	α
Plomb - 210	22,3 ans	β⁻
Bismuth - 210	5,013 jours	β⁻
Polonium - 210	138,376 jours	α
Plomb - 206	مستقر	

3 – معادلتا تحوّل البيزموت (^{214}Bi)

$^{214}_{83}Bi \rightarrow ^{214}_{84}Po + ^{0}_{-1}e$ (تفكك β^-)

$^{214}_{83}Bi \rightarrow ^{210}_{81}Ti + ^{2}_{4}He$ (تفكك α)

4 – الرصاص ^{206}Pb ينتمي لوادي الاستقرار .

التمرين 08

1 – قانون التناقص الإشعاعي $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ ، حيث N_0 هو متوسط عدد الأنوية في بداية التفكك ، N هو متوسط عدد الأنوية في المدة t من بداية التفكك .

2 – من أجل الحصول على عبارة ثابت الزمن نعوّض في عبارة التناقص N بـ $\frac{N_0}{2}$ وندخل اللوغاريتم النبيري على الطرفين ، فنجد ثابت الزمن τ $\tau = \frac{t_{1/2}}{ln 2}$.

3 - لدينا كمية المادة في عينة (n) هي : $n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$ (1)

حيث N هو العدد المتوسط للأنوية ، N_A هو عدد أفوقادرو ، m هي كتلة العينة ، M الكتلة المولية للعنصر .

من العلاقة (1) نستخرج عدد الأنوية الابتدائي $N_0 = \frac{N_A}{M} m_0$ ، وبعد المدة t يكون هذا العدد $N = \frac{N_A}{M} m$

بتعويض N و N_0 بعبارتيهما في قانون التناقص نجد : $\frac{N_A}{M} m = \frac{N_A}{M} m_0 e^{-\lambda t}$ ومنه قانون التناقص بعبارة أخرى :

$$\boldsymbol{m = m_0 \ e^{-\lambda t}}$$

الكتلة المتبقية من الفرانسيوم 223 :

نحسب قيمة الثابت الإشعاعي λ ، $\lambda = \frac{0,69}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{22} = 3,1\times10^{-2}\ mn^{-1}$

$m = m_0 \ e^{-\lambda t} = 1,0\times10^{-13} e^{-0.031\times60} = 1,5\times10^{-14}$ ، $m = 15\ fg$

4 - عدد الأنوية المتبقية : $N = \frac{N_A}{M} m = \frac{6,023\times10^{23}\times1,5\times10^{-14}}{223} = 4\times10^{7}$

نشاط الكتلة المتبقية : $A = \lambda N = \frac{0,69}{22\times60}\times4\times10^{7} = 2,1\times10^{4}\ Bq$

الجزء الثــاني

التمرين 11

$${}^{226}_{88}\text{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86}\text{Rn} \xrightarrow{\alpha} {}^{218}_{84}\text{Po}$$

1 - في اللحظة t تكون كتلة العينة $\quad m(t) = m_0\, e^{-\lambda t} \quad (1)$

وفي اللحظة $(t+\Delta t)$ تكون كتلة العينة $\quad m(t+\Delta t) = m_0\, e^{-\lambda(t+\Delta t)} \quad (2)$

ولدينا $m(t+\Delta t) = \frac{1}{10} m(t)$

بتقسيم العلاقة (2) على (1) نجد : $\quad \frac{1}{10} = e^{-\lambda \Delta t} \quad (3)$

(الكتلة الباقية تمثل $\frac{1}{10}$ من الكتلة الابتدائية ، وكذلك متوسط الأنوية)

لدينا الثابت الإشعاعي $\lambda = \frac{0,69}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{3,825} = 0,18\ j^{-1}$ ، وبذلك نحسب المدة الزمنية بإدخال اللوغاريتم على طرفي العلاقة (3) ،

$ln\, 0,1 = -\lambda\, \Delta t$ ، ومنه $\Delta t = \frac{2,3}{\lambda} = \frac{2,3}{0,18} = 12,7\ jrs$.

2 - بتطبيق قانون الغازات المثـالية : $PV = nRT$ ، ومنه : $n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^4 \times 2 \times 10^{-6}}{8,31 \times (30+273)} = 7,9 \times 10^{-6}\ mol$

3 – عدد الأنوية هو N_0 ، حيث : $N_0 = n \times N_A = 7,9 \times 10^{-6} \times 6,023 \times 10^{23} = 4,76 \times 10^{18}$

4 – اختصارا نعتبر عدد الأنوية N_0 كان متواجدا في اللحظة $t = 0$ ، وبالتالي يكون النشاط في هذه اللحظة :

$$A_0 = \lambda\, N_0 = \frac{0,69}{3,825 \times 24 \times 3600} \times 4,78 \times 10^{18} = 10^{13}\ Bq$$

لكي نحسب النشاط بعد 100 يوم ، أي في اللحظة $t = 100$ jrs ، نطبق العلاقة :

$$A = A_0\, e^{-\lambda t} = 10^{13} \times e^{-0,18 \times 100} = 1,52 \times 10^{5}\ Bq$$

التمرين 12

1 - نجد علاقة بين النشاط A في اللحظة t والنشاط في اللحظة $t = 0$ عندما يكون الزمن t من مضاعفات زمن نصف العمر .

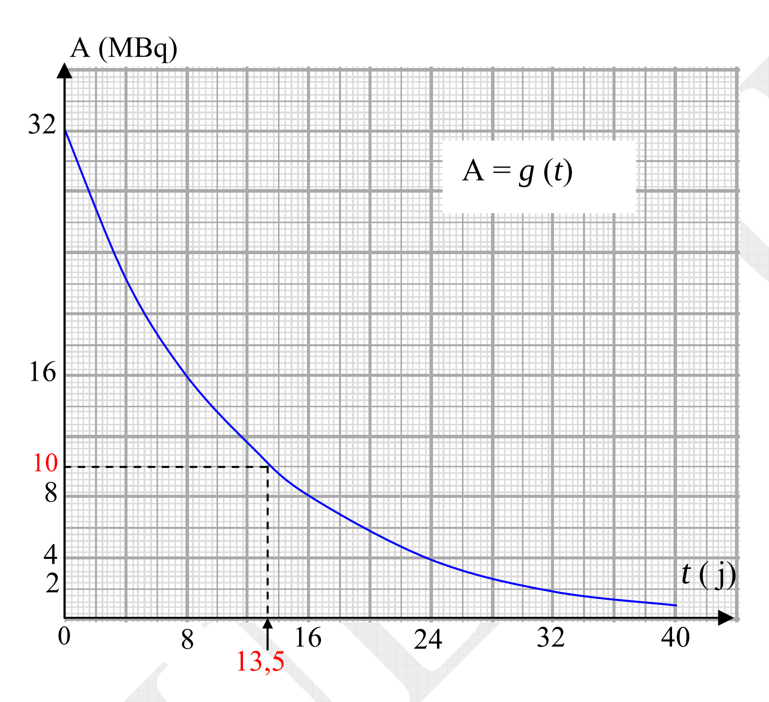
لدينا : $A = A_0\, e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t}$ ، نضع : $t = n\, t_{1/2}$ ، فيصبح $A = A_0 e^{n \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = A_0 e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{A_0}{2^n}$

لأن : $e^{\ln x} = x$

t	$t_{1/2}$	$2\, t_{1/2}$	$3\, t_{1/2}$	$4\, t_{1/2}$	$5\, t_{1/2}$
A (Bq)	$\frac{A_0}{2} = 16\times10^6$	$\frac{A_0}{4} = 8\times10^6$	$\frac{A_0}{8} = 4\times10^6$	$\frac{A_0}{16} = 2\times10^6$	$\frac{A_0}{32} = 10^6$

2 - $A = A_0\, e^{-\lambda t}$ ، ولدينا $\lambda = \frac{0,69}{8} = 0,086\ jrs^{-1}$

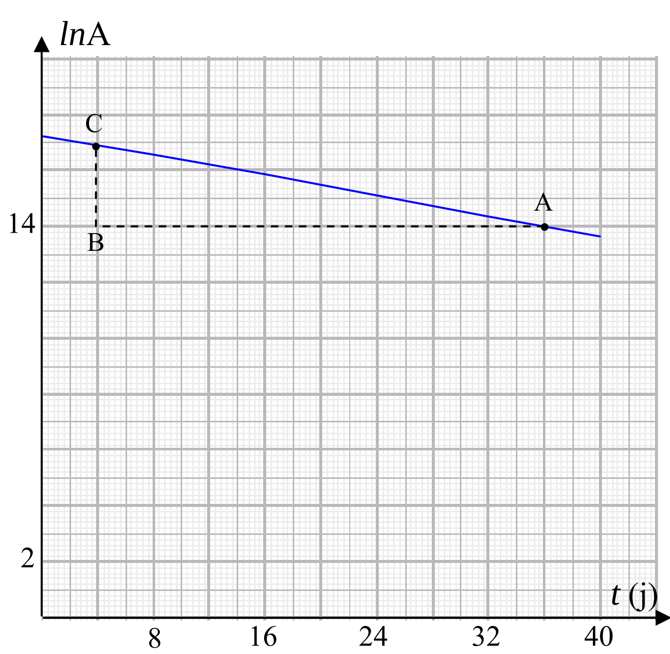
$10^7 = 3,2\times10^7 e^{-0,086 t}$ ، وبادخال اللوغاريتم النيبيري على الطرفين نجد $t = 13,5\ jrs$



3 – تمثيل $\ln A = f\,(t)$

نحسب قيم $\ln A$ ونضعها على الجدول التالي :

t (j)	0	8	16	24	32	40
ln A	17,3	16,6	15,9	15,2	14,5	13,8



4 - ندخل اللوغاريتم النيبيري على طرفي علاقة النشاط : $ln\, A = ln\, A_0\ e^{-\lambda t}$

ln A = lnA$_0$ - λ t

معادلة المستقيم الذي حصلنا عليه هي من الشكل : $y = ax + b$ ، وهي : $\ln A = -\lambda\, t + \ln A_0$

ميل المستقيم هو $-\lambda$

من البيان : $-\lambda = -\frac{CB}{BA} = -\frac{3}{32\times24\times3600}$ ، $\lambda = 1,08 \times 10^{-6}\ s^{-1}$

التمرين 13

1 – يكون الإنحفاظ في الشحنة وفي عدد النوكليونات . $^{137}_{55}Cs \rightarrow {}^{137}_{56}Ba + {}^{0}_{-1}e$

2 – الطاقة المحرّرة هي : $E = \Delta m\, c^2$ ، حيث Δm هو الفرق بين كتلتي المتفاعلات والنواتج ، و c هو ثابت أنشتاين .

$$E = (m_{Cs} - m_{Ba} - m_e)\, c^2 = (136,90707 - 136,90581 - 0,0005486) \times c^2 \times 932,5 / c^2$$

حيث 0,0005486 هي كتلة الإلكترون بوحدة الكتل الذرية u

الطاقة المحرّرة بتفكك السيزيوم 137 هي : $E = 0,66\ MeV$

3 - المقصود **بالدور** هو زمن نصف العمر . ضياع 99 % معناه في كل 100 نواة متوسطا بقيت نواة واحدة ، أي : $\frac{N}{N_0} = 0,01$

وذلك باعتبار N_0 عدد الأنوية في اللحظة $t = 0$ و N عدد الأنوية في اللحظة t .

قانون التناقص $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$ ، ولدينا $\lambda = \frac{0,69}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{2} = 0,345 an^{-1}$

$ln\,0,01 = -\lambda\, t$ ، ومنه $t = \frac{-\ln 0,01}{\lambda} = \frac{4,6}{0,345} = 13,34\ ans$ وهو الزمن المطلوب .

التمرين 14

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\,\alpha + y\,\beta^-$$

1 – نكتب المعادلة بالشكل : $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\ {}^{4}_{2}He + y\ {}^{0}_{-1}e$

بتطبيق قانوني الإنحفاظ في الشحنة وفي عدد النوكليونات نكتب :

$$92 = 82 + 2x - y \qquad (1)$$

$$238 = 206 + 4x \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نجد : $x = 8$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نجد : $y = 6$

2 – نعوّض N بـ $\frac{N_0}{2}$ في علاقة التناقص $N = N_0\, e^{-\lambda t}$ ونجد $\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$ ، وبإدخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي هذه العلاقة نجد $\lambda = \frac{ln 2}{t_{1/2}}$.

3 – التناقص في متوسط عدد الأنوية هو عدد أنوية الرصاص : $N_{Pb} = N_{U_0} - N_U \qquad (2)$

وبالتالي : $N_{Pb} = N_{U_0} - N_{U_0} e^{-\lambda t} = N_{U_0}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \qquad (3)$

4 - من العلاقة (3) نكتب : $\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (4)$

لدينا قانون التقريب : $e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$ ، حيث ε عدد حقيقي صغير أمام 1 . مثال : $\varepsilon = 0,01$ ، يكون لدينا :

$e^{\varepsilon} = 1,01$ و $1 + \varepsilon = 1 + 0,01 = 1,01$

نعوّض في العلاقة (4) λ بـ $\frac{0,7}{t_{1/2}}$: $\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} = 1 - e^{-\frac{0,7}{t_{1/2}}t}$ ، ولدينا t أصغر بكثير من $t_{1/2}$ وبالتالي تصبح العلاقة من الشكل :

$\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} = 1 - e^{-\varepsilon}$ ، وبالتالي يمكن تطبيق التقريب : $\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}} = 1-(1-\varepsilon) = \varepsilon = \frac{0,7}{t_{1/2}}t$

ومنه : $t = \frac{1}{0,7}\frac{N_{Pb}}{N_{U_0}}t_{1/2}$ (5)

5 - لدينا عدد الأنوية في عيّنة : $N = \frac{m\,.\,N_A}{M}$ ، إذن بالنسبة للرصاص : $N_{Pb} = \frac{10\times10^{-3}\times 6,023\times10^{23}}{206} = 29,2\times10^{18}$

أما بالنسبة لعدد أنوية اليورانيوم في اللحظة t فهو $N_U = \frac{1\times 6,023\times10^{23}}{238} = 25,3\times10^{20}$.

ومن العلاقة (2) نحسب $N_{U_0} = N_{Pb} + N_U = 29,2\times10^{18} + 25,3\times10^{20} = 25,6\times10^{20} \approx N_U$.

بالتعويض في العلاقة (5) نجد الزمن المطلوب : $t = 4,5\times10^{9}\,\frac{29,2\times10^{18}}{2530\times10^{18}}\times\frac{1}{0,7} = 7,42\times10^{7}\ ans$

التمرين 15

ملاحظة :

عندما تتفكّك نواة لإعطـاء نواة إبن ، نــادرا ما تكون هذه النواة الإبن في حالتها الأساسية (أي غير المثارة) .

في هذا التفكك تنتج نواة الإيثريوم في حالتها الأساسية . ${}^{90}_{38}Sr \rightarrow {}^{90}_{39}Y + {}^{0}_{-1}e$

1 – المعادلة الحصيلة : ${}^{24}_{11}Na \rightarrow {}^{24}_{12}Mg^{*} + {}^{0}_{-1}e$

2 – نحسب نقص الكتلة في هذا التفكك :

كتلتا الذرتين ${}^{24}Na$ و ${}^{24}Mg$ المضبوطتان هما على التوالي:

23,98490 u و 23,97808 u

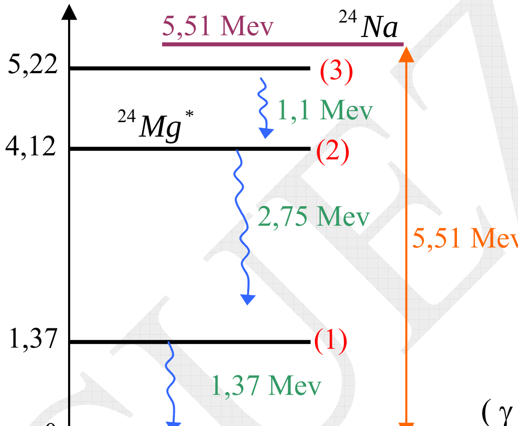
$\Delta m = (m_{Na} - m_{Mg} - m_e)$

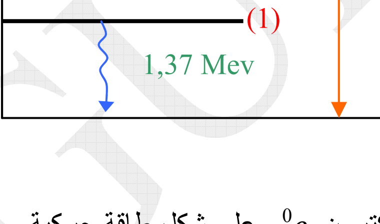
$\Delta m = 23,98490 - 23,97808 - 0,00091 = 5,91 \times 10^{-3}$ u

الطاقة المحررة عن تفكك نواة الصوديوم 24 هي :

$$E_{lib} = \Delta m c^2 = 5,91\times10^{-3}c^2 \times \frac{932,5}{c^2} = 5,51\,MeV$$

مستويات الطاقة للنظير ${}^{24}Mg$ (MeV)





إذا صدرت نواة المغنيزيوم في حالة مثارة فإنها تُصدر فوتونات (إشعاعات كهرومغناطيسية γ)

حسب المعادلة : ${}^{24}_{12}Mg^{*} \rightarrow {}^{24}_{12}Mg + \gamma$

إذا صدرت نواة المغنزيوم في حالتها الأسـاسية فإن الطاقة المحررة (5,51 MeV) تُقدّم كلها للإلكترون ${}^{0}_{-1}e$ على شكل طاقة حركية .

3 – إذا صدرت نواة المغنزيوم في الحالة المثارة 2 ، فهذا يُعني أولا أن النواة تبعث فوتونا طاقته $E_\gamma = 5,51 - 5,22 = 0,29$ MeV

أما الطاقة $E = 5,22$ MeV تُقدّم على شكل طاقة حركية للإلكترون (باهمال طاقة النوترينو ν طبعا)

ملاحظة : عندما تنطلق قذيفة من مدفع نلاحظ رجوع المدفع للخلف ، هذه الظاهرة نسميها إرتداد المدفع . إن رجوع المدفع للخلف يحتاج لطاقة يُحوّلها لطاقة حركية . هذا ما يحدث عند انبعاث الإلكترون فإن النواة ترتد ، ونحن قمنا بإهمال الارتداد .

التمرين 16

1 - $^{139}_{55}Cs \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{139}_{56}Ba$

2 – القيمة الصحيحة للدور (زمن نصف العمر) هي $t_{1/2} = 9,27\,s$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{9,27} = 7,4\times10^{-2}\,mn^{-1}$$

3 – الكتلة الموجودة في اللحظة t هي : $m = m_0 - \frac{m_0}{10} = \frac{9}{10}m_0$

ولدينا $m = m_0 e^{-\lambda t}$ ، وبتعويض الكتلة m بعبارتها ، نكتب $\frac{9}{10}m_0 = m_0 e^{-\lambda t}$ ، ومنه $\frac{9}{10} = e^{-\lambda t}$

بإدخال اللوغاريتم النبيري على طرفي هذه العلاقة نجد $-0,105 = -\lambda t$ ، ومنه :

$$t = \frac{0,105}{7,4\times10^{-2}} = 14,2\,mn = 1mn\,25\,s$$

4 – النشاط : لدينا $A = \lambda N \quad (1)$

نحسب أولا عدد الأنوية $N = N_A \frac{m}{M} = 6,023\times10^{23}\,\frac{1\times10^{-6}}{139} = 43\times10^{14}$

ولدينا الثابت الإشعاعي $\lambda = \frac{0,69}{9,27\times60} = 1,24\times10^{-3}\,s$ ، وبالتعويض في العلاقة (1) نجد

$$A = 1,24\times10^{-3}\times43\times10^{14} = 5,3\times10^{10}\,Bq$$

التمرين 17

1 – معادلة التفكك : $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$

قانونا الانحفاظ هما إنحفاظ الشحنة وانحفاظ النوكليونات . نوع التفكك هو β^- .

2 – الزمن اللازم هو زمن نصف العمر $t_{1/2} = 5570\,ans$

3 – العلاقة هي $A = A_0\, e^{-\lambda t}$

4 – لدينا $A = 70$ Bq و $A_0 = 120$ Bq

نحسب عمر القطعة الخشبية من العلاقة $A = A_0\, e^{-\lambda t}$

$$70 = 120\, e^{-\frac{0,69}{5570}t}$$

$$\frac{7}{12} = e^{-1,238\times10^{-4}\,t}$$

$$\ln\frac{7}{12} = -1,238\times10^{-4}\,t$$

ومنه $t = 3041\,ans$

التمرين 18

لدينا $A = 12\,mn^{-1} = \frac{12}{60} = 0,2\,s^{-1} = 0,2\,Bq$

$$A_0 = 12\,mn^{-1} = \frac{13,6}{60} = 0,226\,s^{-1} = 0,226\ Bq$$

1 – زمن نصف العمر هو الزمن اللازم لتفكك نصف العدد المتوسط للأنوية .

لدينا $N = \frac{N_0}{2}$ ، وبالتالي نكتب $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$ ، وبادخال اللوغاريتم النبيري على الطرفين نجد $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

2 - $A = A_0 e^{-\lambda t}$ ، ومنه $\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$ ، وبادخال اللوغاريتم النبيري على الطرفين نجد $-\lambda t = \ln \frac{A}{A_0}$ أو $\lambda t = \ln \frac{A_0}{A}$

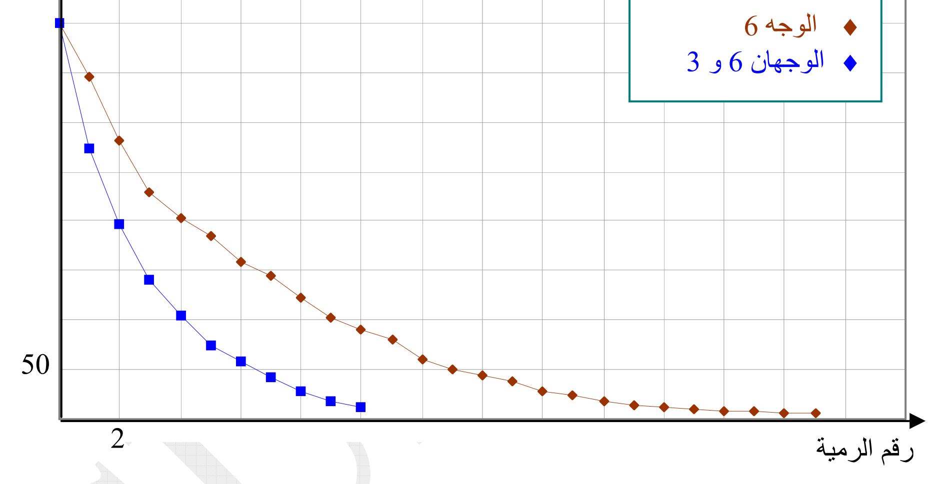
وبالتالي $t = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{\lambda}$

3 - $t = \frac{\ln \frac{0,226}{0,2}}{\frac{\ln 2}{5570}} = \frac{0,125 \times 5570}{0,69} = 1009\,ans$ ، ومنه سنة صُنع البـاخرة هي $1983 - 1009$ ، أي 974 م

4 - الفرضية صحيحة لأن $1000 > 974 > 700$

التمرين 19

1 –



إعـادة صياغة الفقرة الأولى من التمرين :

يشابه تفكك الأنوية عملية رمي مجموعة من أزهار النرد (Dés) عددها N_0 .

تتمّ هذه العملية كما يلي :

لدينا مجموعة من أزهار النرد عددها $N_0 = 400$

(أزهار النرد عبارة عن مكعّبات متماثلة - أي 6 أوجه – هذه الأوجه مرقمة من 1 إلى 6)

نقوم برميها فوق طاولة ، ثم نسحب من المجموعة كل الأزهار التي تعطي الوجه رقم 6 .

نعتبر هذه الأزهار كأنها الأنوية التي تفككت ضمن مجموعة من الأنوية .

نُعيد خلط الأزهار الباقية ، ثم نرميها ونقوم بسحب رقم 6 ، وهكذا ...

نعتبر أن كل عملية رمي توافق ثانية واحدة (1s) ، أي أن في الجدول الزمن يوافق N° de lancé . أما Dés restants يوافق الأنوية المتواجدة في اللحظة t .   **انتهى**

إحصائيا (أنت غير مطالب بهذا) نجد $\Delta N = -pN\Delta t \quad (1)$

حيث p هو احتمال الحصول على الوجه رقم 6 في الرمية الواحدة .

الثابت p يوافق ثابت التفكك λ ، وهذا الاحتمال طبعا هو $p = \frac{1}{6}$ ، أي احتمال 1 من 6 (6 هو عدد الأوجه وليس الرقم 6 المسجل على أحد الوجوه) .

أما من أجل التجربة الثانية الإحتمال هو $p' = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

من أجل $\Delta t \to 0$ نكتب العلاقة (1) على الشكل $\frac{dN}{dt} = -pN$ ، ويكون حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل $N = N_0 e^{-pt}$

ملاحظة :

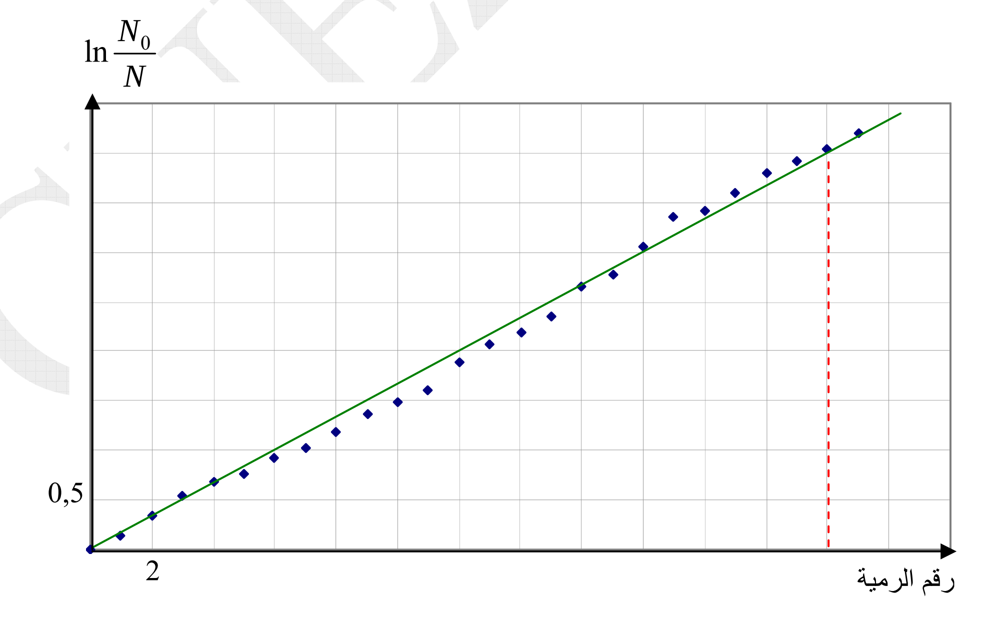
خلال تفكك الأنوية يكون دائما $p = \frac{1}{2}$ ، لأن النواة إما تتفكك أو لا تتفكك ، أي أن احتمال تفككها هو 50% .

2 - لدينا $\ln \frac{N}{N_0} = -pt$ ، وبالتالي $\ln \frac{N_0}{N} = pt$ ، وهي العلاقة التي نمثلها بيانيا ، وهي من الشكل $y = ax$

التجربة الأولى :

رقم الرمية	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{N_0}{N}$	1	1,16	1,42	1,74	1,98	2,16	2,51	2,77	3,25	3,92	4,44	5	6,55	7,84	8,89
$\ln \frac{N_0}{N}$	0	0,15	0,35	0,55	0,68	0,77	0,92	1,02	1,18	1,36	1,49	1,61	1,88	2,06	2,18

رقم الرمية	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\frac{N_0}{N}$	10,52	14,28	16	21,05	28,57	30,77	36,36	44,44	50	57,14	66,67
$\ln \frac{N_0}{N}$	2,35	2,66	2,77	3,05	3,35	3,42	3,60	3,79	3,91	4,04	4,20



ثابت التفكك هو ميل المستقيم .

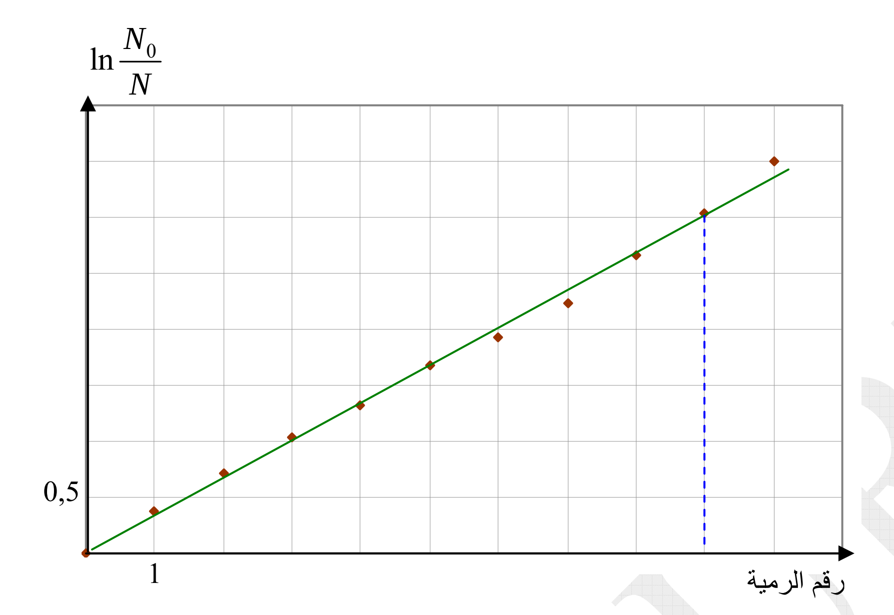
$$p = \lambda = \frac{8 \times 0,5}{12 \times 2} = 0,167\, s^{-1}$$

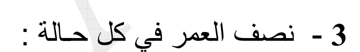
التجربة الثـانية :

رقم الرمية	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{N_0}{N}$	1	1,46	2,03	2,83	3,81	5,33	6,89	9,30	14,28	21,05	33,33
$\ln\frac{N_0}{N}$	0	0,38	0,71	1,04	1,33	1,67	1,93	2,23	2,66	3,04	3,50

ثابت التفكك هو ميل المستقيم .

$$p'=\lambda'=\frac{6\times 0,5}{9\times 1}=0,33\,s^{-1}$$

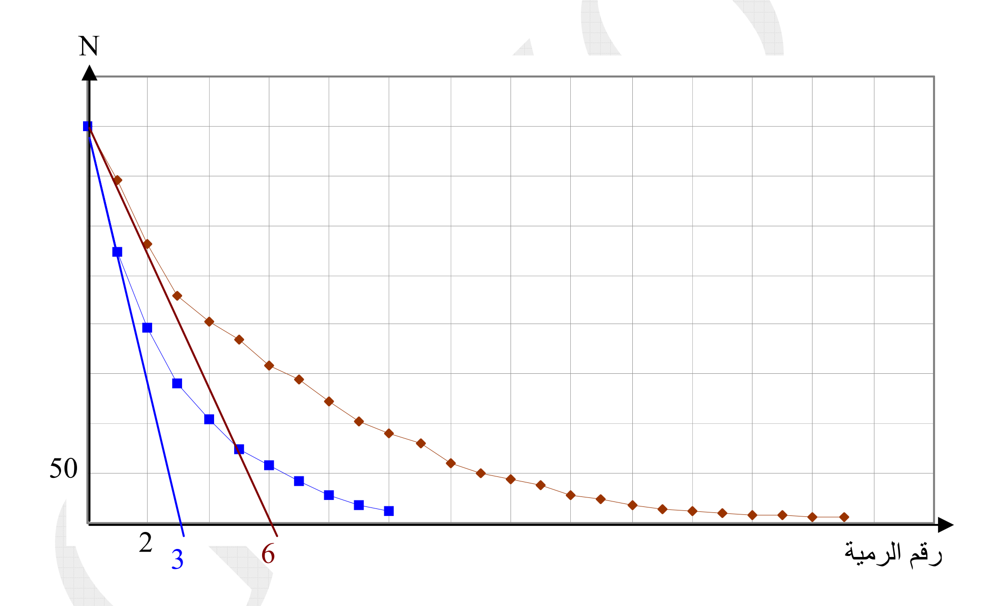




3 - نصف العمر في كل حـالة :

$$t_{1/2}=\frac{\ln 2}{p}=\frac{0,69}{0,167}=4,13\,s$$

$$t'_{1/2}=\frac{\ln 2}{p'}=\frac{0,69}{0,33}=2,09\,s$$



ملاحظة :

يمكن التأكد من ثابت التفكك في كل تجربة

برسم المماسين للبيانين عند $t=0$

فيقطعان محور الزمن في ثابت الزمن $\tau=\frac{1}{\lambda}$

4 - نصف عمر السيزيوم 137 هو

$$t_{1/2}=30,2\,ans$$

كل هذا شرحناه في مقدّمة التمرين .

التمرين 20

1 - التفكك β^- : $^{40}_{19}K \rightarrow {}^{40}_{20}Ca + {}^{0}_{-1}e$

التفكك β^+ : $^{40}_{19}K \rightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{0}_{+1}e$

2 - $N=\frac{A(t)}{\lambda}=\frac{A(t)\times t_{1/2}}{\ln 2}$

3 - الطاقة المحررة عن تفكك البوتاسيوم 40 إلى كلسيوم 40 :

$$E_{lib(1)} = (m_K - m_{Ca} - m_e)c^2 \times \frac{931,5}{c^2} = (39,964 - 39,9626 - 0,000548) \times 931,5 = 0,79 MeV$$

4 - الطاقة المحررة عن تفكك البوتاسيوم 40 إلى أرغون 40 :

$$E_{lib(2)} = (m_K - m_{Ar} - m_e)c^2 \times \frac{931,5}{c^2} = (39,964 - 39,9624 - 0,000548) \times 931,5 = 0,98 MeV$$

5 – الطاقتان المحسوبتان سابقا هما الطاقتان المحررتان جرّاء تفكك نواة واحدة فقط .

عدد الأنوية في جسم الإنسان الذي يزن 70 kg هي :

$$N = \frac{A(t) \times t_{1/2}}{0,69} = \frac{5000 \times 1,28 \times 10^9 \times 365,25 \times 24 \times 3600}{0,69} = 2,93 \times 10^{11}$$

الطاقة المحرّرة من هذه الأنوية عندما يتحوّل البوتاسيوم إلى كلسيوم : $E'_{lib(1)} = \frac{89}{100} \times 0,79 \times 2,93 \times 10^{11} = 2,07 \times 10^{20} MeV$

الطاقة المحرّرة من هذه الأنوية عندما يتحوّل البوتاسيوم إلى أرغون : $E'_{lib(2)} = \frac{11}{100} \times 0,98 \times 2,93 \times 10^{11} = 0,32 \times 10^{20} MeV$

الطاقة الكلية هي : $E_{lib} = E'_{lib(1)} + E'_{lib(2)} = 2,39 \times 10^{20} MeV$

التمرين 21

1 - $^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A}_{Z}X$

$A = 232 - 4 = 228$

$Z = 90 - 2 = 88$

من المعطيات نستنتج أن النوكليد $^{A}_{Z}X$ هو $^{228}_{88}Ra$

2 - الكتلة المولية (M) تحوي عدد أوفوقادرو (N_A) من الأنوية ، أما الكتلة m_0 تحوي العدد N_0 من الأنوية ، وبالتالي بالقاعدة الثلاثية نجد : $\frac{m_0}{M} = \frac{N_0}{N_A}$ ، ومنه $N_0 = N_A \times \frac{m_0}{N_A} = 6,023 \times 10^{23} \times \frac{10^{-3}}{232} = 26 \times 10^{17}$

3 - أ) نصف العمر للتوريوم هو المدة الزمنية اللازمة لتفكك نصف العدد المتوسط للأنوية الابتدائية .

.... « **إن الجدول أعلاه يسمح بإعطـاء تأطير بصفة لفظية ، مــاهو ؟** »

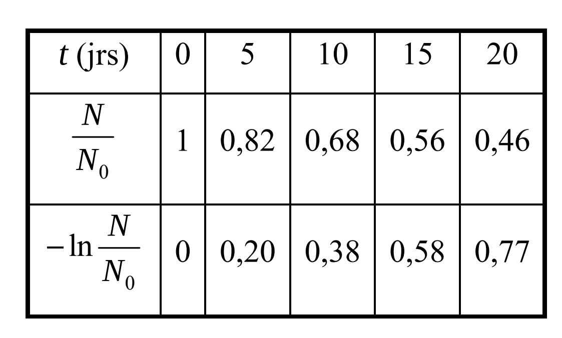
هذه العبـارة غامضة ، نقوم بتوضيحها .

إن الجدول أعلاه يسمح بحصر زمن نصف العمر بين قيمتين يُطلب تعيينهمــا

الجواب :

زمن نصف العمر يوافق عدد الأنوية $N = \frac{N_0}{2}$ المتواجدة آنذاك ، أي $\frac{N}{N_0} = 0,5$ ، ونعلم أن هذه القيمة محصورة بين 0,46 و 0,56 في الجدول ، إذن $15\ jrs < t_{1/2} < 20\ jrs$

ب) الجدول والبيان :

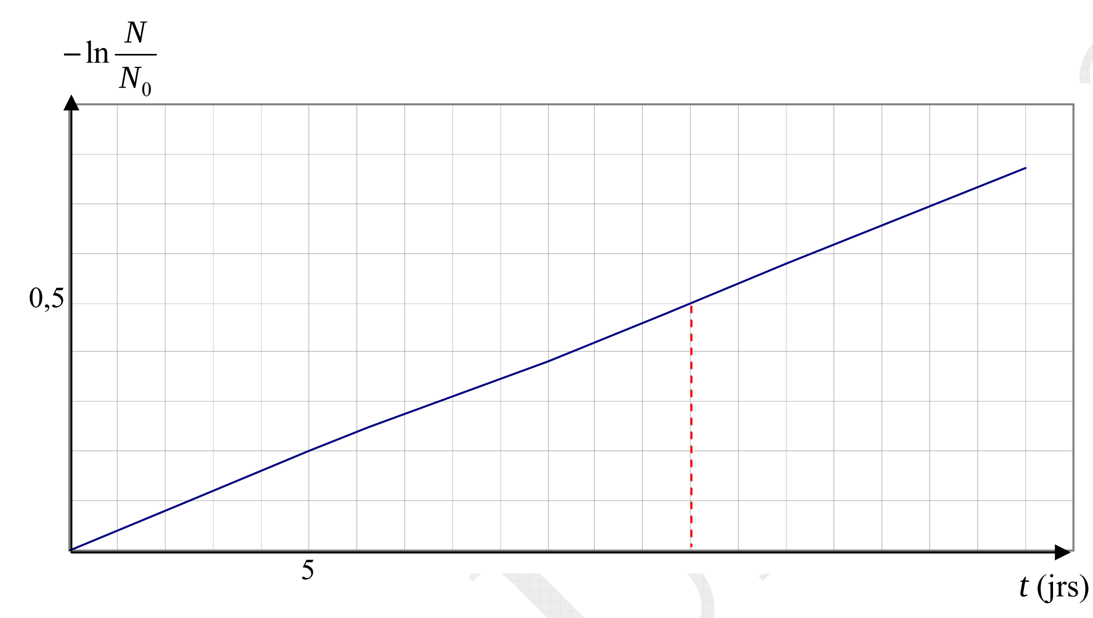


t (jrs)	0	5	10	15	20
$\frac{N}{N_0}$	1	0,82	0,68	0,56	0,46
$-\ln\frac{N}{N_0}$	0	0,20	0,38	0,58	0,77

العلاقة النظرية : لدينا $\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$ ، وبادخال اللوغاريتم النبيري على الطرفين

$\ln\frac{N}{N_0}=-\lambda t$ ، أو $-\ln\frac{N}{N_0}=\lambda t$ ، وهذه العلاقة توافق مستقيما معادلته

من الشكل : $y=ax$ ، حيث λ تمثل الميل a .



جـ)

$\lambda=\frac{0,5}{13}=3,85\times10^{-2}\ jrs^{-1}=\frac{3,85\times10^{-2}}{24\times3600}=4,45\times10^{-7}\,s^{-1}$ ، $t_{1/2}=\frac{\ln2}{\lambda}=\frac{0,69}{3,85\times10^{-2}}=17,9\ jrs$

4 - النشاط في اللحظة $t=0$:

$$A_0=\lambda N_0=4,45\times10^{-7}\times26\times10^{17}=1,16\times10^{12}\ Bq$$

التمرين 22

I - أسئلة تمهيدية

1 – تتميّز نواة الذرة برقمها الشحني Z وعددها الكتلي A (عدد النوكليونات) .

2 - $^{11}_{6}C$ و $^{12}_{6}C$ نظيران ، لأن لهما نفس Z (6) ويختلفان في N (بالنسبة للأول N = 5 وبالنسبة للثاني N = 6)

3 - $^{15}_{8}O\rightarrow{}^{0}_{+1}e+{}^{15}_{7}N$

II - بعض أنماط الإشعـاع

1 - β^- عبارة عن إلكترون $^{0}_{-1}e$

α عبـارة عن نواة الهليوم $^{4}_{2}He$

2 - كتلة الإلكترون $m_e=9,1\times10^{-31}kg$

كتلة نواة الهليوم $m_{He}=2m_p+2m_n=2(1,673+1,675)\times10^{-27}=6,7\times10^{-27}kg$

كتلة نواة الهليوم أكبر من كتلة الإلكترون (وكذلك كتلة البوزيتون $^{0}_{+1}e$) بحوالي 7360 مرة .

III - التصوير الوماض

طـالع الصفحة 91 من - تجريب واستكشاف – للتعرّف على كيفية استعمــال النشاط الإشعاعي في الطب (الرسّامات) .

1 – زمن نصف العمر هو الزمن اللازم لتفكك نصف متوسط الأنوية N_0 .

2 – في الطب نستعمل النوكليد المشع الذي يتناقص نشاطه بسرعة ، وهذا يتوافق مع ^{131}I ، حيث أن خلال 400 يوم يتغير النشاط من القيمة 2×10^{5} Bq إلى القيمة 6×10^{-3} Bq .

IV - المعالجة الإشعاعية

1 - $^{60}_{27}Co \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{60}_{28}Ni^*$ ثم $^{60}_{28}Ni^* \rightarrow {}^{60}_{28}Ni + \gamma$

2 - أ) $N_0 = N_A \dfrac{m_0}{M} = 6,023\times10^{23}\times\dfrac{1\times10^{-6}}{60} = 10^{16}$

ب) العبارة المطلوبة هي $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ (1)

جـ) المطلوب هو : أعطِ عبارة ΔN ، ليس : أعطِ العينة ΔN .

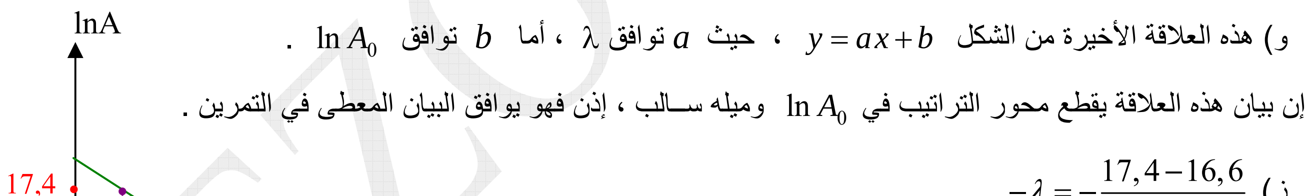
نعوّض في العبارة (1) $N = N_0 e^{-\lambda t}$ ، فنجد $\Delta N = -\lambda \Delta t N_0 e^{-\lambda t}$ (2)

د) النشاط في اللحظة t هو $A = \dfrac{|\Delta N|}{\Delta t} = A_0 e^{-\lambda t}$ ، وبتعويض ΔN من العلاقة (2) نكتب : $\dfrac{\lambda \Delta t N_0 e^{-\lambda t}}{\Delta t} = A_0 e^{-\lambda t}$ ، ومنه

$A_0 = \lambda N_0$

هـ) لدينا $A = A_0 e^{-\lambda t}$ ، وبادخــال اللوغاريتم النيبيري على الطرفين نكتب :

$\ln A = \ln A_0 + \ln e^{-\lambda t}$ ، ومنه $\ln A = \ln A_0 - \lambda t$



و) هذه العلاقة الأخيرة من الشكل $y = ax + b$ ، حيث a توافق λ ، أما b توافق $\ln A_0$.

إن بيان هذه العلاقة يقطع محور التراتيب في $\ln A_0$ وميله ســالب ، إذن فهو يوافق البيان المعطى في التمرين .

ز) $-\lambda = -\dfrac{17,4-16,6}{7-1}$

$\lambda = 0,13\, an^{-1}$

حـ) العلاقة المطلوبة هي : $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$

ط) $t_{1/2} = \dfrac{0,69}{0,13} = 5,23\, ans = 1,65\times10^{8}\, s$

التمرين 23

1 - الدور الإشعــاعي (زمن نصف العمر) لـ A هو T_A (أو $t_{1/2}$)

$\lambda_A = \dfrac{0,69}{T_A} = \dfrac{0,69}{15} = 4,6\times10^{-2}\, jrs^{-1}$

2 – نحسب عدد الأنوية الابتدائي : $N_0 = N_A \dfrac{m_0}{M} = 6,023\times10^{23}\times\dfrac{20}{225} = 53\times10^{21}$

النشاط الابتدائي هو $A_0 = \lambda N_0 = \frac{4,6\times10^{-2}}{24\times3600}\times53\times10^{21} = 2,8\times10^{16}\ Bq$

3 – الاتزان الإشعاعي (أو التوازن القرني) : عندما تتفكك مجموعة من الأنوية لإعطاء أنوية غير مستقرّة ، فتبدأ هذه الأخيرة في التفكك في الوقت الذي مازالت المجموعة الأولى تتفكك ، نقول أن التوازن القرني قد حدث عندما يصبح نشاطا المجموعتين متساويين .

لدينا التفكك : $A \rightarrow B \rightarrow C$

عند الاتزان الإشعاعي تكون النسبة $\alpha = \frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2}$

في اللحظة t يكون عدد أنوية A : $N_{(A)} = N_A \frac{m_A}{M_A}$ (1)

في اللحظة t يكون عدد أنوية B : $N_{(B)} = N_A \frac{m_B}{M_B}$ (2)

حيث N_A هو عدد أفوقادرو .

بما أن النوكليد B ناتج عن تفكك النوكليد A حسب النمط β ، إذن $M_A = M_B$.(A لا يتغير في التفكك β)

بقسمة (1) على (2) نجد : $\frac{N_{(A)}}{N_{(B)}} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2}$ (3)

بما أن نشاطي A و B متساويان ، نكتب $\lambda_A N_{(A)} = \lambda_B N_{(B)}$ ، ومنه $\frac{N_{(A)}}{N_{(B)}} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$ ، وباستعمال العلاقة (3) نجد

$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{3}{2}$ ، ومنه $\lambda_B = \frac{3}{2}\lambda_A = 1,5\times4,6\times10^{-2} = 6,9\times10^{-2}\ jrs^{-1}$.

زمن نصف العمر لـ B هو $T_B = \frac{\ln 2}{\lambda_B} = \frac{0,69}{6,9\times10^{-2}} = 10\ jrs$

4 - المعادلة التفاضلية الخاصة بتفكك A هي $\frac{dN_{(A)}}{dt} = -\lambda N_{(A)}$

المعادلة التفاضلية الخاصة بتفكك B هي $\frac{dN_{(B)}}{dt} = -\lambda N_{(B)} + \lambda_A N_{(A)}$ ، لأن في نفس الوقت B يتفكك ويزداد جرّاء تفكك A .

5 - يؤدي حل هـاتين المعادلتين التفاضليتين إلى : $N_{(B)} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_{(A)_0}\left(e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_A t}\right)$ ، حيث $K = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_{(A)_0}$

هذا الحل معطى في التمرين $N_{(B)} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_{(A)_0}\left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right)$ ، وهو حل خطأ .

نعيد صيــاغة السؤال الأخير : ... أثبت أنه في اللحظة $t = t_0$ يمر N_B بقيمة عظمى ، ثم احسب قيمة t_0 بالأيـام .

القيمة العظمى لـ $N_{(B)}$ تكون من أجل مشتق $N_{(B)}$ بالنسبة للزمن يساوي الصفر .

المشتق هو : $\frac{dN_{(B)}}{dt} = -K\lambda_B e^{-\lambda_B t} + K\lambda_A e^{-\lambda_A t}$

من أجل $\frac{dN_{(B)}}{dt}=0$ يكون $\lambda_B e^{-\lambda_B t}=\lambda_A e^{-\lambda_A t}$ ، ومنه $\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{e^{-\lambda_A t}}{e^{-\lambda_B t}}$

$\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{e^{-\lambda_A t}}{e^{-\lambda_B t}}=e^{(\lambda_B-\lambda_A)t}$ ، وبادخــال اللوغاريتم النبيري على الطرفين نكتب : $\ln\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=(\lambda_B-\lambda_A)\,t$

القيمة t_0 المطلوبة هي $t_0=\frac{\ln\frac{\lambda_B}{\lambda_A}}{\lambda_B-\lambda_A}=\frac{\ln\lambda_B-\ln\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}=\frac{0,405}{2,3\times10^{-2}}=17,6\ jrs$

التمرين 24

1 - أ) من $t=0$ إلى $t=t_0$:

عدد الأنوية المتواجدة في كل ثانية هو عدد الأنوية الذي ننتجه في كل ثانية (ρ) منقوص منه عدد التفككات في الثانية (λN) ، أي

$$\frac{dN}{dt}=\rho-\lambda N$$

$\frac{dN}{dt}+\lambda N=\rho$ ، وبضرب طرفي هذه المعادلة في $e^{\lambda t}$ نحصل على $e^{\lambda t}\left(\frac{dN}{dt}+\lambda N\right)=\rho e^{\lambda t}$

$$\frac{dN}{dt}e^{\lambda t}+\lambda Ne^{\lambda t}=\rho e^{\lambda t}$$

العبارة $\frac{dN}{dt}e^{\lambda t}+\lambda Ne^{\lambda t}$ تمثل مشتق جداء دالتين هما N و $e^{\lambda t}$ ، وبالتالي نكتب $\frac{d}{dt}\left(Ne^{\lambda t}\right)=\rho e^{\lambda t}$

نكامل طرفي هذه المساواة (إيجاد الدالة الأصلية) : $\int\frac{d}{dt}\left(Ne^{\lambda t}\right)=\int\rho e^{\lambda t}$

$Ne^{\lambda t}=\rho\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}+K$ ، حيث K عبارة عن ثابت التكامل .

من هذه العبارة نجد $N=\frac{\rho}{\lambda}+Ke^{-\lambda t}$ (1)

تحديد الثابت K : نعلم أنه في اللحظة $t=0$ يكون N = 0 (ما زالت أنوية الكربون لم تُصنع)

وبالتعويض في العلاقة (1) : $0=\frac{\rho}{\lambda}+K$ ، ومنه $K=-\frac{\rho}{\lambda}$

نعوّض عبارة K في المعادلة (1) ونجد $N=\frac{\rho}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$

ب) من أجل $t>t_0$:

إنتهى تصنيع الكربون في اللحظة t_0 ، فبعد هذه اللحظة تبدأ أنوية الكربون في التناقص فقط ولا تزداد .

$\frac{dN}{dt}=-\lambda N$ ، ومنه $\frac{dN}{N}=-\lambda\,dt$

نكامل طرفي هذه المساواة (إيجاد الدالة الأصلية) : $\int\frac{dN}{N}=-\lambda\int_0^t dt$ ، وبالتالي $\ln N+K=-\lambda[t]_0^t$

حيث K هو ثابت التكامل

ومنه ، $\ln N + K = -\lambda t$ ، $\ln N = -\lambda t - K$ وبالتالي ، $N = e^{-\lambda t - K}$

يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل $N = e^{-\lambda t} \times e^{-K}$ (2)

تحديد الثابت K :

عندما $t = t_0$ يكون $N = \frac{\rho}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) نكتب $\frac{\rho}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t_0}\right) = e^{-\lambda t_0} \times e^{-K}$

ومنه $e^{-K} = \frac{\frac{\rho}{\lambda} - \frac{\rho}{\lambda}e^{-\lambda t_0}}{e^{-\lambda t_0}} = \frac{\rho}{\lambda}\left(e^{\lambda t_0} - 1\right)$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) نجد

$$N = \frac{\rho}{\lambda}\left(e^{\lambda t_0} - 1\right)e^{-\lambda t}$$

2 – ثابت التفكك : $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{5600} = 1,23 \times 10^{-4}\, an^{-1}$

3 – إذا كان المقصود هو أن $\frac{3}{4}$ من القيمة الابتدائية قد تفككت ، فهذا معناه أن الـ $\frac{1}{4}$ من القيمة الابتدائية يتواجد في اللحظة t ، لأن :

$$N = N_0 - \frac{3}{4}N_0 = N_0\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{N_0}{4}$$

نعوّض في معادلة التناقص : $\frac{N_0}{4} = N_0 e^{-\lambda t}$ ، ومنه $\frac{1}{4} = e^{-\lambda t}$ ، وبإدخال اللوغاريتم النيبري على الطرفين نكتب

$-\lambda t = -\ln 4$ ، ومنه $t = \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{1,38}{1,23 \times 10^{-4}} = 11201 ans$

أو بما أن $N = \frac{N_0}{4} = \frac{N_0}{2^2}$ فإن $t = 2t_{1/2} = 5600 \times 2 = 11200\, ans$

الزمن الموافق لـ 0,1 % من النشاط الابتدائي : لدينا $A = A_0 e^{-\lambda t}$ (3)

لدينا $A = \frac{0,1}{100}A_0 = \frac{A_0}{1000}$ ، وبالتعويض في العلاقة (3) نكتب $\frac{A_0}{1000} = A_0 e^{-\lambda t}$ ، ومنه $\frac{1}{1000} = e^{-\lambda t}$

بادخال اللوغاريتم النيبري على الطرفين $-6,9 = -\lambda t$ ، ومنه $t = \frac{6,9}{1,23 \times 10^{-4}} = 56160\, ans$

4 – تصحيح السؤال 4 :

ما هي كتلة هذا النظير الموافقة لنشاط قدره 3×10^7 Bq ؟ (يجب أن تعطى قيمة للنشاط وليس للكتلة) .

$$m = \frac{N(t) \times 14}{N_A} \qquad (4)$$

ولدينا $A = \lambda N$ ، وبالتعويض في العلاقة (4) نجد $m = \frac{A \times 14}{\lambda N_A} = \frac{3 \times 10^7 \times 14}{3,9 \times 10^{-12} \times 6,023 \times 10^{23}} = 1,8 \times 10^{-4} g$

في هذا الحساب حوّلنا λ لـ s^{-1} : $\lambda = \frac{1,23 \times 10^{-4}}{365,25 \times 24 \times 3600} = 3,9 \times 10^{-12} s^{-1}$

الزمن اللازم لتفكك $\frac{7}{8}$ من العينة (أي يبقى $\frac{1}{8}$ منها)

$N = \frac{N_0}{8} = \frac{N_0}{2^3}$ ، ومنه $t = 3t_{1/2} = 3 \times 5600 = 16800\, ans$

الجزْء الثـالث

التمرين 25

1 – البولونيوم هو $_{84}Po$ وليس $_{82}Po$.

يحتاج التمرين للمعلومتين التاليتين : $m_{He} = 4,0015u$ ، زمن نصف عمر البولونيوم $t_{1/2} = 138,4\ jrs$

$$^{210}_{84}Po \rightarrow ^{206}_{82}Pb + ^{4}_{2}He$$

2 – الطــاقة المحرّرة : $E_{lib} = (m_i - m_f)c^2 = (209,98286 - 205,97445 - 4,0015) \times 931,5 = 6,43\,MeV$

3 – لا ينتج فوتون معناه أن نواة الرصاص نتجت في حالتها المستقرّة ، وبالتالي تكون الطاقة الحركية المعطاة للجسيم α هي :

$E_c = 6,43$ MeV

4 – في هذه الحالة تكون الطـاقة المقدّمة للجسيم α : $E'_c = 6,43 - 2,2 = 4,23$ MeV ، لأن القيمة 2,2 MeV هي الطاقة المقدّمة لانبعاث الفوتون (طاقة إشعاعية) .

5 – المقصود هو السؤالان 3 و 4 ، ليس جـ و د .

نحسب الثابت الإشعاعي للبولونيوم : $\lambda = \frac{0,69}{t_{1/2}} = \frac{0,69}{138,4 \times 24 \times 3600} = 5,77 \times 10^{-8}\ s^{-1}$

نحسب عدد أنوية البولونيوم عندما كان نشاط العينة $A = 3 \times 10^{15}$ Bq : $N = \frac{A}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{15}}{5,77 \times 10^{-8}} = 52 \times 10^{21}$

كل نواة من هذه الأنوية لما تتفكك تُعطي جسيما واحدا α ، إذن الطاقة التي تتحرر هي الطاقة المتحرّرة عن نواة واحدة من البولونيوم مضروبة في عدد الأنوية .

المقصود في هذا التمرين أن هناك منبعا للبولونيوم يُصدر الإشعاعات α ، بحيث تسقط هذه الإشعاعات على ورقة من الألمنيوم ، ويتم امتصاصها من طرف الورقة ، وبالتالي تكون الإشعاعات α قد قدّمت طاقة لورقة الألمنيوم ، وهي الطاقة الحركية التي اكتسبتها ، مع افتراض أن الفوتونات لا يتم امتصاصها من طرف الورقة .

هناك أنوية من الرصاص تنتج في حالتها المستقرّة والبعض الآخر ينتج في حالة مثارة ، بحيث أن نسبتي الحالتين هي 50 % ، وبالتالي تكون الطاقة التي تستقبلها ورقة الألمنيوم هي : $E = \left(\frac{50}{100} \times 6,43 + \frac{50}{100} \times 4,23\right) \times 52 \times 10^{21} = 2,77 \times 10^{23}\,MeV$

التمرين 26

في المعطيات نكتب $1u = 1,66054 \times 10^{-27}\,kg = 931,5\,MeV/c^2$

1 - نحسب طاقة الربط لنواة النظير ^{127}I : نحوّل كتلة النظير لواحدة الكتل الذرية ،

$$m_{^{127}I} = \frac{2,106831 \times 10^{-25}}{1,66054 \times 10^{-27}} = 126,87625\,u = 126,87625 \times 931,5\,MeV/c^2$$

$$E_l = (53 \times 1,00728 + 74 \times 1,00866 - 126,87625) \times 931,5 = 1071\,MeV$$

نحسب طاقة الربط لنواة النظير ^{131}I : نحوّل كتلة النظير لواحدة الكتل الذرية ،

$$m_{^{131}I} = \frac{2,17329\times10^{-25}}{1,66054\times10^{-27}} = 130,8785\,u = 130,8785\times931,5\,MeV/c^2$$

$$E'_l = (53\times1,00728 + 74\times1,00866 - 130,8785)\times931,5 = 1102\,MeV$$

2 – طاقة الربط لكل نوكليون : $\frac{E_l}{A} = \frac{1071,6}{127} = 8,44\,MeV$ ، $\frac{E'_l}{A} = \frac{1102}{131} = 8,41\,MeV$

3 - النظير الأكثر استقرارا هو النظير الذي يملك طاقة تماسك لكل نوية $\frac{E_l}{A}$ (نوكليون) أكبر ، وبالتالي ^{127}I هو الأكثر استقرارا .

التمرين 27

1 – معادلة التفاعل : $^7_3Li + ^1_1p \rightarrow 2\,^4_2He$

2 – ضياع الكتلة في هذا التفاعل : $m_i - m_f = 7,01435 + 1,00728 - 2\times4,0015 = 0,01863\,u$

3 – مبدأ انحفاظ الطاقة : نستغلّ هذه الفرصة لنوضح هذا المبدأ لكثرة الأسئلة حوله :

ليكن التحوّل النووي التالي سواء كان تلقائيا أو مفتعلا : $X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4$ ، حيث X أنوية أو جسيمات .

الطاقة المحفوظة في مثل هذه التفاعلات هي طاقة الكتلة mc^2 والطاقة الحركية للأنوية أو الجسيمات .

X_1 و X_2 يمكن أن يكونا في حركة أو أحدهما ساكن والآخر متحرّك (مثلا قذف نواة بواسطة نوترون) .

الطاقة محفوظة في التحول ، أي $m_1c^2 + E_{c1} + m_2c^2 + E_{c2} = m_3c^2 + E_{c3} + m_4c^2 + E_{c4}$

$\left[(m_1+m_2)-(m_3+m_4)\right]c^2 = (E_{c3}+E_{c4})-(E_{c1}+E_{c2})$ ، الرمز Δ معناه التغيّر ، أي القيمة الأخيرة ناقص الأولى .

$-\Delta mc^2 = \Delta E_c$ ، ومنه $\Delta mc^2 = -\Delta E_c$ (1)

- إذا كان $\Delta m > 0$ ، أي كتلة النواتج **أكبر** من كتلة المتفاعلات ، فهذا معناه حسب العلاقة (1) أن $\Delta E_c < 0$ ، وبالتالي في هذا التفاعل **تحوّلت الطاقة الحركية إلى طاقة كتلة** ، أو بقول آخر : الطاقة تحوّلت إلى كتلة حسب علاقة التكافؤ طاقة – كتلة .

هذا التفاعل مــاص للحرارة

- إذا كان $\Delta m < 0$ ، أي كتلة النواتج **أصغر** من كتلة المتفاعلات ، فهذا معناه حسب العلاقة (1) أن $\Delta E_c > 0$ ، وبالتالي في هذا التفاعل **تحوّلت طاقة الكتلة إلى طاقة حركية** ، أو بقول آخر : الكتلة تحوّلت إلى طاقة حسب علاقة التكافؤ طاقة – كتلة .

هذا التفاعل يُحرّر الطاقة

هذه الحالة الأخيرة هي التي نصادفها عندما يُطلب منّا حساب الطاقة المحرّرة في تفاعل نووي .

العلاقة التي نطبّقها هي : $E_{lib} = (m_i - m_f)c^2$ (2)

لأن $m_i - m_f = -\Delta m$ ، أي أنه عندما يكون $m_i - m_f > 0$ يكون $\Delta m < 0$ (أي أن الطاقة تتحرّر) .

ملاحظة : يمكن أن نستعمل العلاقة $E_{lib} = \Delta mc^2$ ، في هذه الحالة نجد E_{lib} سالبة ، ونقول كذلك أن الطاقة تحررت ، لأن Δm ما زالت دائما سالبة .

نرجع للتمرين

لتكن : E_{c1} : الطاقة الحركية للبروتون

E_{c2} : الطاقة الحركية لنواة الليثيوم

$E_{c3} + E'_{c3}$: الطاقة الحركية للجسيمتين α

مبدأ انحفاظ الطاقة يُعطي : $m_{Li}c^2 + E_{c1} + m_p c^2 + E_{c2} = E_{c3} + E'_{c3} + 2\,m_{He}c^2$

$E_{c2} = 0$ ، حيث نعتبر أن نواة الليثيوم قُذفت وهي في حالة الراحة ، وبالتالي $\left(E_{c3} + E'_{c3}\right) = m_{Li}c^2 + m_p c^2 + E_{c1} - 2\,m_{He}c^2$

$$E_{c1} = 600\,keV = 6\times10^5\,eV = 0,6\,MeV$$

$$\left(E_{c3} + E'_{c3}\right) = \left(m_{Li} + m_p - 2\,m_{He}\right)c^2 + E_{c1} = \left(7,01435 + 1,00728 - 2\times4,0015\right)\times931,5 + 0,6 = 17,95\,MeV$$

التمرين 28

1 - $${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}p$$

2 - تغيّر الكتلة معناه $\Delta m = m_f - m_i$ ، وبالتالي :

$$\Delta m = m_O + m_p - m_N - m_{He} = 16,9947 + 1,00866 - 13,9992 - 4,0015 = 2,66\times10^{-3}u$$

3 – تغيّر الطاقة : إذا كان المقصود هو طاقة الجملة ، فإن طاقة الجملة لا تتغير (محفوظة) . أما إذا كان المقصود هو الطاقة الحركية التي تحوّلت إلى طاقة كتلة ، نجدها كما يلي :

E_1 : طاقة المتفاعلات ، حيث : $E_1 = E_{c1} + m_N c^2 + E_{c2} + m_{He}c^2$

E_2 : طـاقة النواتج ، حيث : $E_2 = E_{c3} + m_O c^2 + E_{c4} + m_p c^2$

التغير في طاقة الجملة هو $E_2 - E_1 = E_{c3} + m_O c^2 + E_{c4} + m_p c^2 - E_{c1} - m_N c^2 - E_{c2} - m_{He}c^2$

$$E_2 - E_1 = \left(E_{c4} + E_{c3}\right) - \left(E_{c2} + E_{c1}\right) + \left[\left(m_O + m_p\right) - \left(m_N + m_{He}\right)\right]c^2 = \Delta E_c + 2,66\times10^{-3}\times931,5$$

ونعلم أن $E_2 - E_1 = 0$ لأن طاقة الجملة محفوظة ، وبالتالي : $\Delta E_c = -2,66\times10^{-3}\times931,5 = -2,47\,MeV$

4 – في هذا التفاعل تحوّلت الطاقة الحركية للجسيمات α إلى طاقة كتلة ، والتي ظهرت في النواتج ، لأن كتلة النواتج أكبر من كتلة المتفاعلات ، أي $\Delta m > 0$.

التمرين 29

1 – معادلة التفكك ${}^{15}_{8}O \rightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{15}_{7}N$

2 - طاقة الربط للنواة E_l هي الطـاقة التي يجب صرفها لتفكيك مكونات النواة وبقاء هذه المكوّنات في حالة الراحة .

3 - حساب ΔE_1 : هي طاقة تماسك النواة ${}^{15}_{8}O$ ، أي الانتقال من النواة ${}^{15}_{8}O$ إلى مكوّنات هذه النواة .

$$\Delta E_1 = 7\times7,463 = 111,9\,MeV$$

4 - حساب ΔE_2 : هي الطاقة اللازمة للانتقال من $(8\ p + 7\ n)$ إلى $(7\ n + 8\ p + 1\ e^+)$ ، أي الطاقة اللازمة ليتحوّل بروتون إلى نوترون حسب المعادلة : ${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_{+1}^{\ 0}e$

$$\Delta E_2 = \left[\left(7m_p + 8m_n + m_e\right) - \left(8m_p + 7m_n\right)\right] \times c^2 = \left(m_n + m_e - m_p\right)c^2$$

$\Delta E_2 = [1,008665 + 0,000548 - 1,007276] \times 931,5 = 1,8\,MeV$ ، حيث الكتل مقاسة بـ u .

5 - استنتاج ΔE :

من المخطط لدينا : $\Delta E_3 = \Delta E - \Delta E_1 - \Delta E_2$ ، ومنه $\Delta E = \Delta E_3 + \Delta E_1 + \Delta E_2 = -115,5 + 111,9 + 1,8 = -1,8\,MeV$

التمرين 30

1 - يشمل منحنى أستون على التراتيب $-\dfrac{E_l}{A}$ وعلى الفواصل العدد الكتلي A .

الأنوية الموجودة على هذا المنحني هي أنوية طبيعية .

ملاحظة : مثّل أستون على التراتيب $-\dfrac{E_l}{A}$ وليس $\dfrac{E_l}{A}$ ، فقط لمشابهة الاستقرار النووي بالتوازن المستقر لجسم قابل للدوران حول محور (مثلا ساق معدنية متجانسة قابلة للدوران حول محور أفقي Δ يمر من إحدى نهايتيها) ، بحيث يكون الجسم في توازن مستقر عندما يكون مركز ثقله في أقرب نقطة لسطح الأرض .



الاستقرار يكون في M_0 وليس في M_1 .

كل الأجسام **تريد** أن يكون لها أصغر طاقة كامنة ثقالية لكي تستقر ، وبالتالي تحاول الاقتراب من سطح الأرض .



- منحنى أستون يقارن استقرار الأنوية فيما بينها .

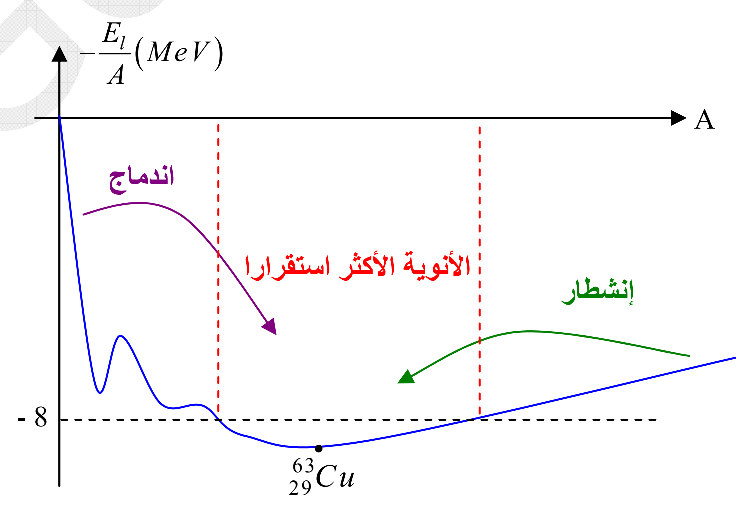
- طاقة الربط لكل نوية المتوسطة بين كل الأنوية هي حوالي 8 MeV .

2 – كان من الأحسن طرح السؤال بالصيغة التالية : أين تقع الأنوية **الأكثر** استقرار .

مثلا : الأنوية ${}_2^3He$ ، ${}_2^4He$ ، ${}_3^6Li$ ، ${}_4^9Be$ كلها تقع في وادي الاستقرار في مخطط سوقري ، وهي موجودة على منحني أستون وطاقة الربط لكل نوكليون فيها على الترتيب هي 2,56 MeV ، 7,07 MeV ، 5,33 MeV ، 6,46 MeV .

هذه القيم كلها توافق $-\dfrac{E_l}{A} > -8\,MeV$ ، أي $\dfrac{E_l}{A} < 8\,MeV$.

إذن الهدف من هذا المنحني هو مقارنة الاستقرار وليس الاستقرار وعدم الاستقرار .



3 – طاقات الربط لكل نوية :

$^{10}_{4}Be$: $\frac{E_l}{A}=\frac{(4\times1{,}00728+6\times1{,}00866-10{,}01133)\times931{,}5}{10}=6{,}49\,MeV$

$^{6}_{3}Li$: $\frac{E_l}{A}=\frac{(3\times1{,}00728+3\times1{,}00866-6{,}01347)\times931{,}5}{6}=5{,}33\,MeV$

$^{208}_{82}Pb$: $\frac{E_l}{A}=\frac{(82\times1{,}00728+126\times1{,}00866-207{,}93162)\times931{,}5}{208}=7{,}86\,MeV$

$^{60}_{28}Ni$: $\frac{E_l}{A}=\frac{(28\times1{,}00728+32\times1{,}00866-59{,}91547)\times931{,}5}{60}=8{,}78\,MeV$

$^{238}_{92}U$: $\frac{E_l}{A}=\frac{(92\times1{,}00728+146\times1{,}00866-238{,}00018)\times931{,}5}{238}=7{,}57\,MeV$

4 -

Li Be U Pb Ni

→ استقرار متزايد

التمرين 31

$$^{235}_{92}U+^{1}_{0}n\rightarrow^{139}_{53}I+^{94}_{39}Y+3^{1}_{0}n$$

1 – الطـاقة المحرّرة : $E_{lib}=(m_i-m_f)c^2$

$$m_i=234{,}99332+1{,}00866=236{,}00198u$$

$$m_f=138{,}897+93{,}89014+3\times1{,}00866=235{,}81312u$$

$$E_{lib}=(236{,}00198-235{,}81312)\times931{,}5=175{,}8\,MeV$$

2 – التفاعل التسلسلي :

عند قذف نواة اليورانيوم بواسطة نوترون تنتج أنوية أخف ، ويتحرّر عادة 2 نوترون أو 3 نوترونات ، حيث بإمكان هذه النوترونات أن تصدم أنوية أخرى من اليورانيوم ، ثم تتحرر نوترونات أخرى وتتواصل هكذا العملية ، لذا يسمى التفاعل تفاعلا تسلسليا .

3 – حوالي 85 % من الطاقة المحرّرة تذهب على شكل طاقة حركية مجهرية تُعطى لأنوية اليورانيوم والنواتج . أما 15 % من الطاقة المحرّرة تصدر على شكل طاقة كهرومغناطيسية (طاقة إشعاعية) .

4 – عدد الأنوية في 1 kg من اليورانيوم : $N=N_A\frac{m}{M}=6{,}023\times10^{23}\times\frac{1000}{235}=2{,}56\times10^{24}$

الطاقة المحرّرة من 1 kg هي :

$$E_{lib_{(T)}}=E_{lib}\times N=2{,}56\times10^{24}\times175{,}8=4{,}5\times10^{26}\,MeV=7{,}21\times10^{13}J=72\times10^{6}MJ$$

لأن : $1MeV=1{,}602\times10^{-13}J$ و $1MJ=10^{6}J$

5 - كتلة البترول المطلوبة : 1 kg يحرّر 42 MJ ، وبالتالي الطاقة 72×10^{6} MJ تنتج عن كتلة قدرها (بالقاعدة الثلاثية) :

$$m=\frac{72\times10^{6}}{42}=1{,}71\times10^{6}\,kg=1771\,t$$

التمرين 32

$${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$$

1 – الطاقة المحرّرة : $E_{lib} = (m_i - m_f)c^2 = (2,0136 + 3,0155 - 4,0015 - 1,00866) \times 931,5 = 17,64\,MeV$

2 – تظهر الطاقة المحررة على شكل طاقة حركية في النواتج وطاقة إشعاعية .

3 - $m\left({}_1^2H + {}_1^3H\right) = 2,0136 \times 1,66 \times 10^{-27} + 3,0155 \times 10^{-27} = 8,35 \times 10^{-27}\,kg$

يمكن مباشرة تطبيق القاعدة الثلاثية :

$$8,35 \times 10^{-27}\,kg \rightarrow 17,64\,MeV$$
$$1\,kg \rightarrow E$$

ومنه : $E = \dfrac{17,64}{8,35} \times 10^{27} = 2,11 \times 10^{27}\,MeV = 2,11 \times 10^{27} \times 1,602 \times 10^{-13} = 3,38 \times 10^{14}\,J = 3,38 \times 10^{8}\,MJ$

4 - كتلة البترول المطلوبة :

$$1\,kg \rightarrow 42\,MJ$$
$$m \rightarrow 3,38 \times 10^{8}\,MJ$$

ومنه : $m = \dfrac{8,38 \times 10^{8}}{42} = 2 \times 10^{7}\,kg = 20000\,t$

5 - رأينا في التمرين 31 في السؤال الرابع أن الطاقة المحرّرة من 1 kg من اليورانيوم 235 هي $72 \times 10^{6}\,MJ$ ، أما الطاقة المحرّرة هنا عن 1 kg من $\left({}_1^2H + {}_1^3H\right)$ هي حوالي $3,4 \times 10^{8}\,MJ$ ، وهي أكبر بحوالي 5 أضعاف من الأولى .

الطاقة المحرّرة في الاندماج أكبر من الطاقة المحرّرة في الإنشطار عموما .

التمرين 33

تصحيح : $m\left({}_2^3He\right) = 3,01493\,u$

1 – طاقة الربط لكل نوية

${}_2^3He$: $\dfrac{E_l}{A} = \dfrac{(2 \times 1,00728 + 1 \times 1,00866 - 3,01493) \times 931,5}{3} = 2,57\,MeV$

${}_2^4He$: $\dfrac{E_l}{A} = \dfrac{(2 \times 1,00728 + 2 \times 1,00866 - 4,0015) \times 931,5}{4} = 7,07\,MeV$

الهيليوم 4 أكثر استقرارا من الهيليوم 3 لأن طاقة الارتباط لكل نوية بالنسبة للأول أكبر من الثاني .

دليل آخر خارج عن التمرين :

انبعاث α $\left({}_2^4He\right)$ في التفككات التلقائية وعدم انبعاث ${}_2^3He$ دليل على لأن ${}_2^4He$ أكثر إستقارا من ${}_2^3He$.

2 - معادلة التفاعل الناتج : ${}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + 2\,{}_1^1H$

3 - الطاقة المحرّرة : $E_{lib} = (m_i - m_f)c^2 = (2 \times 3,01493 - 4,0015 - 2 \times 1,00728) \times 931,5 = 12,85\,MeV$

نحسب عدد الأنوية في 1 t من الهيليوم 3 : $N = N_A \times \dfrac{m}{M} = 6,023 \times 10^{23} \times \dfrac{10^6}{3} = 2 \times 10^{29}$

4 - الطاقة المحرّرة من $1\ t$ هي : $E'_{lib}=\frac{2\times10^{29}}{2}\times12,85\approx1,3\times10^{30}MeV$

المقصود بالطاقة المسترجعة الطاقة التي نلتقطها ، أي الطاقة المحرّرة .

التمرين 34

$${}_{1}^{2}H+{}_{1}^{3}H\rightarrow{}_{2}^{4}He+{}_{0}^{1}n$$

1- الطاقة المحرّرة : $E_{lib}=\left(m_i-m_f\right)c^2=\left(2,0136+3,0155-4,0015-1,00866\right)\times931,5=17,64\,MeV$

2 - 17,64 MeV هي الطاقة المحرّرة عندما تتشكل نواة واحدة من الهيليوم .

نواة واحدة من الهليوم كتلتها $m=4,0015\times1,66\times10^{-24}=6,64\times10^{-24}g$

$$6,64\times10^{-24}g\ \rightarrow\ 17,64MeV$$
$$1g\ \rightarrow\ E'_{lib}$$

ومنه : $E'_{lib}=\frac{1\times17,64}{6,64\times10^{-24}}=2,65\times10^{24}\,MeV$

3 – الطاقة المحرّرة من الشمس هي : $E=P\,t=3,9\times10^{26}\times1=3,9\times10^{26}J$

هذه الطاقة تكافيء كتلة m ، حيث $m=\frac{E}{c^2}=\frac{3,9\times10^{26}}{9\times10^{16}}=4,3\times10^{9}\,kg$

4 – خلال ثانية واحدة (1s) تفقد الشمس كتلة قدرها $m=4,3\times10^{9}\,kg$

خلال $4,6\times10^{9}\times365\times24\times3600=1,45\times10^{17}s$ تفقد الشمس كتلة قدرها m'

$$m'=1,45\times10^{17}\times4,3\times10^{9}=6,23\times10^{26}\,kg$$

5 –

$$2\times10^{30}kg\ \rightarrow\ 100\%$$
$$6,23\times10^{26}kg\ \rightarrow\ x$$

وبالتالي $x=\frac{6,23\times10^{26}\times100}{2\times10^{30}}=0,03\%$

التمرين 35

1 - ${}_{92}^{235}U+{}_{0}^{1}n\rightarrow{}_{x}^{94}Sr+{}_{54}^{139}Xe+y\,{}_{0}^{1}n$

$$236=94+139+y\ \Rightarrow\ y=3$$
$$92=x+54\ \Rightarrow\ x=38$$

2 – الطاقة المحرّرة :

$$E_{lib}=\left(m_i-m_f\right)c^2=\left(234,99345+1,00866-93,89451-138,88917-3\times1,00866\right)\times931,5=179\,MeV$$

3 – عندما يتم استخراج اليورانيوم من باطن الأرض ، نجد في عينة النظير 238 بنسبة عالية جدا أما اليورانيوم 235 لا يتعدّى في العيّنة النسبة 0,7% .

تخصيب اليورانيوم معناه رفع نسبة النظير 235 في العينة .

يتم التخصيب بواسطة أجهزة الطرد المركزي المستعملة في هذا المجال ، حيث يتم إيصال نسبة النظير 235 إلى حوالي 5% بالنسبة للمجال السلمي ، وتصل النسبة إلى حوالي 90% بالنسبة للمجال العسكري (صناعة الأسلحة النووية) .

هذا ما يحدث حاليا في المفاعلات النووية للجمهورية الإسلامية الإيرانية حسب ما يقوله الدكتور البرادعي .

نحسب كمية النظير 235 في 1 g من اليورانيوم المخصّب : $m = \frac{1 \times 3,7}{100} = 0,037\,g$

عدد أنوية النظير 235 في هذه العينة : $N = 6,023 \times 10^{23} \times \frac{0,037}{235} = 9,5 \times 10^{19}$

الطاقة المحرّرة هي $E'_{lib} = 9,5 \times 10^{19} \times 179 = 17 \times 10^{21}\,MeV$

4 – نحسب الطاقة المحوّلة إلى كهرباء سنويا : $E = P\,t = 900 \times 10^6 \times 365 \times 24 \times 3600 = 2,8 \times 10^{16}\,J$

نحسب كمية النظير 235 في 27 طن ($27\,t$) من اليورانيوم المخصّب : $m = \frac{27 \times 10^6 \times 3,7}{100} = 10^6\,g$

نحسب عدد الأنوية في هذه الكمية : $N = 6,023 \times 10^{23}\,\frac{10^6}{235} = 2,5 \times 10^{27}$

نحسب الطاقة المحررة من استهلاك $27\,t$ من اليورانيوم المخصب (أي $1\,t$ من النظير 235) :

$$E' = 2,56 \times 10^{27} \times 179 = 4,58 \times 10^{29}\,MeV = 7,34 \times 10^{16}\,J$$

المردود هو النسبة بين الطاقة المحوّلة إلى كهرباء والطاقة المحرّرة : $\eta = \frac{E}{E'} = \frac{2,8 \times 10^{16}}{7,34 \times 10^{16}} = 0,38$

المردود هو 38%

التمرين 36

1 – القانونان هما : انحفاظ عدد النوكليونات وانحفاظ الشحنة الكهربائية .

2 – البوزيتون جسيم له نفس كتلة الإلكترون (0,000548 u) وشحنة كهربائية مماثلة لشحنة البروتون .

يتحرّر البوزيتون عندما يتحول بروتون إلى نوترون .

3 -

$$\left({}_1^1H + {}_1^1H \rightarrow {}_1^2H + {}_1^0e\right) \times 2$$

$$\left({}_1^2H + {}_1^1H \rightarrow {}_2^3He\right) \times 2$$

$${}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + 2\,{}_1^1H$$

ضربنا المعادلة الثانية في 2 لتحقيق نواتين من ${}_2^3He$ لأن المعادلة الثالثة تحتاج نواتين ، وضربنا المعادلة الأولى في 2 لتحقيق نواتين من ${}_1^2H$ ، لأن في المعادلة الثانية أصبح عدد هذه الأنوية إثنان بعد ضربها في 2 .

- نجمع المعادلات الثلاثة ونختصر من الطرفين فنجد الحصيلة الكلية لهذه الدورة : $4\,{}_1^1H \rightarrow {}_2^4He + 2\,{}_1^0e$

- الطاقة المحرّرة في هذه الدورة $E_{lib} = \left(m_i - m_f\right)c^2 = \left(4 \times 1,0073 - 4,0015 - 2 \times 0,000548\right) \times 931,5 = 24,8\,MeV$

- 4

أ)

$${}^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{13}_{7}N$$
$${}^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{1}e$$
$${}^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{14}_{7}N$$
$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{15}_{8}O$$
$${}^{15}_{8}O \rightarrow {}^{15}_{7}N + {}^{0}_{1}e$$
$${}^{15}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$$

ب) بجمع هذه المعادلات كما هي طرفا لطرف والقيام بالاختصارات نجد الحصيلة الكليّة للدورة : $4{}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + 2{}^{0}_{1}e$

تسمى هذه الدورة دورة (Bethe – von Weizsäcker)

الجزء الأول - ثنائي القطب RC

التمرين 01

سعة المكثفة الأولى : $C_1 = \dfrac{Q}{U_1} = \dfrac{3\times10^{-5}}{6} = 0{,}5\times10^{-5}\ F$

التوتر بين طرفي المكثفة الثانية : $U_2 = \dfrac{Q}{C_2} = \dfrac{3\times10^{-5}}{10^{-6}} = 30\ V$

التمرين 02

1 – شحنة المكثفة الأولى : $Q_1 = C_1U = 2\times10^{-6}\times100 = 2\times10^{-4}\ C$

بعد ربط المكثفتين على التفرع تتوزع الشحنة Q_1 عليهما حسب سعة كل واحدة .

السعة المكافئة لهما هي $C = C_1 + C_2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5\ \mu F$



2 - التوتر بين طرفي كل مكثفة هو التوتر بين طرفي المكثفة المكافئة ، أي :

$$U' = \frac{Q_1}{C} = \frac{2\times10^{-4}}{2{,}5\times10^{-6}} = 80\ V$$

التمرين 03

المولد المستعمل في هذه الدارة هو مولد للتيار ، أي أن التيار طيلة عملية الشحن يبقى ثابتا .

1 - العلاقة بين u و t :

لدينا الشحنة المتوضعة على لبوسي المكثفة في اللحظة t هي $q = I\,t$ (1)

ولدينا العلاقة بين التوتر والشحنة : $u = \dfrac{q}{C}$ (2)

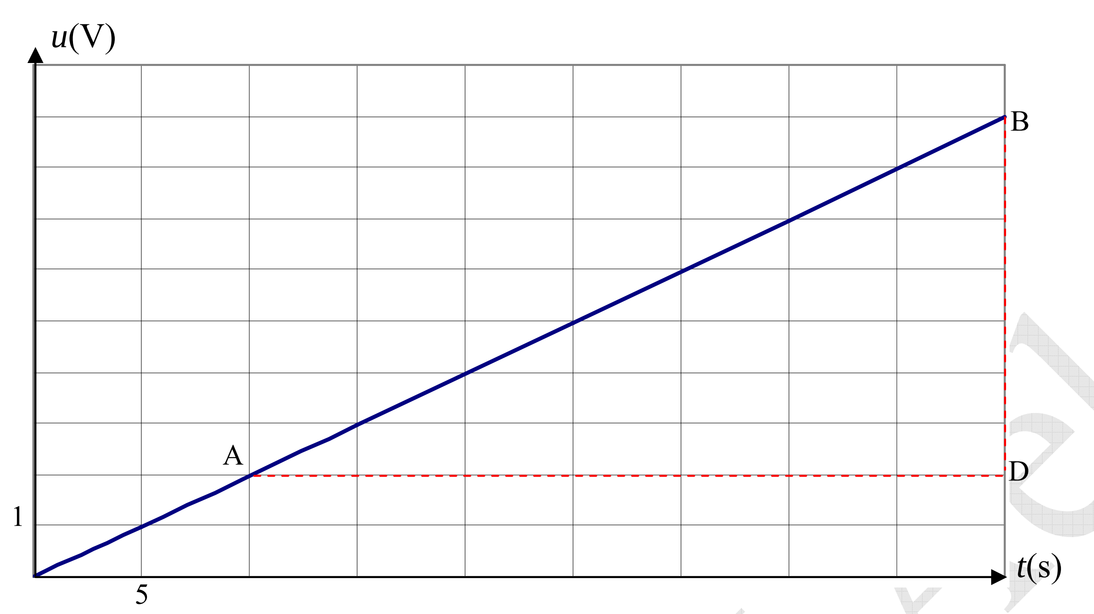
من العلاقتين (1) و (2) نستنتج العلاقة المطلوبة : $\boldsymbol{u = \dfrac{I}{C}\,t}$

ملاحظة : يجب الانتباه إلى عدم الخلط بين هذه الحالة والحالة التي نستعمل فيها مولدا للتوتر ، حيث أن في هذه الحالة الأخيرة يتغير التوتر حسب دالة أسية في النظام الانتقالي ، ثم يصبح ثابتا مهما كان الزمن في النظام الدائم . أما في الحالة التي يتطرق لها هذا التمرين فإن التوتر يتناسب مع الزمن حسب علاقة خطية .

2 - رسم البيان :

ميل البيان هو النسبة $\dfrac{I}{C}$

من البيان : $\dfrac{I}{C} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{7}{7\times5} = 0{,}2\ V.s^{-1}$ ، ومنه : $C = \dfrac{I}{0{,}2} = \dfrac{20\times10^{-6}}{0{,}2} = 10^{-4}\ F$



التمرين 04

1 – سعة المكثفة المكافئة : $C = \dfrac{C_1\ C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{1 \times 2}{1+2} = \dfrac{2}{3}\ F$

شحنة المكثفة المكافئة : $Q = C\ U = \dfrac{2}{3} \times 10^{-6} \times 300 = 2 \times 10^{-4}\ C$

2 – التوتر بين طرفي كل مكثفة : بما أن المكثفتين مربوطتان عل التسلسل فإن $Q_1 = Q_2 = Q$

$U_1 = \dfrac{Q}{C_1}$ (1) ، $U_2 = \dfrac{Q}{C_2}$ (2) . بتقسيم العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{C_2}{C_1} = 2$ ، $U_1 = 2\ U_2$ (3)

بما أن المكثفتين مربوطتان على التسلسل ، فإن $U_1 + U_2 = 300$ (4)

من المعادلتين (3) و (4) نستنتج : $U_2 = 100\ V$ ، $U_1 = 200\ V$

3 - $Q_1 = Q_2 = Q = 2 \times 10^{-4}\ C$ ، أو نحسبهما بواسطة العلاقتين (1) و (2)

التمرين 05

1 - نبحث عن طريقة ربط بسيطة و غير مكلفة (نستعمل فيها أقل عدد من المكثفات) .

نستعمل تجميعا من المكثفات عددها n_1 بربطها على التفرع ، ثم نربط على التسلسل عددا n_2 من هذه التجميعات .

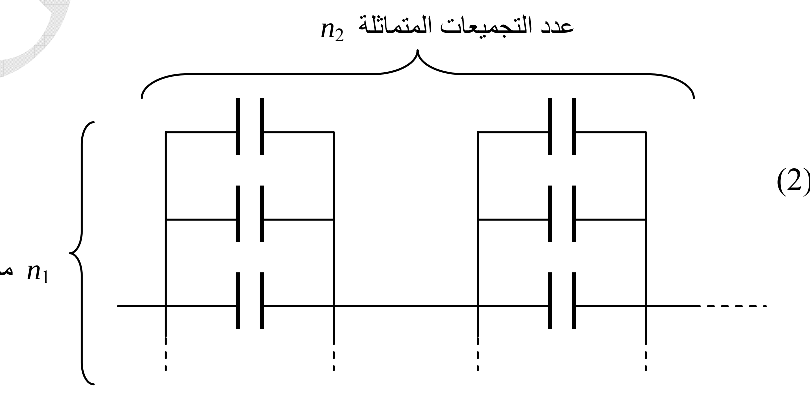
السعة المكافئة في تجميع واحد هي :

$C' = n_1\ C_1$ (1)

السعة المكافئة لكل التجميعات هي :

$\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C'} + \dfrac{1}{C'} + ... = n_2 \dfrac{1}{C'}$ (2)

نعوّض عبارة C' من العلاقة (1) في العلاقة (2) ونجد :



$n_1 = n_2 \dfrac{C}{C_1}$ ، وبالتالي : $n_1 = 50\ n_2$

من أجل $n_2 = 1$ ، فإن $n_1 = 50$

من أجل $n_2 = 2$ ، فإن $n_1 = 100$ وهكذا ...

2 - أبسط تركيب هو الموافق للحالة الأولى ، أي 50 مكثفة كلها على التفرع .

3 - أ) شحنة المكثفة المكافئة : $Q = C\,U = 5\ 10^{-3} \times 40 = 0{,}2\ C$

ب) المكثفات متماثلة ، إذن شحنة كل واحدة هي : $Q' = \dfrac{Q}{n_1} = \dfrac{0{,}2}{50} = 4\times10^{-3}\ C$

التمرين 06

1 – يمكن إفراغ المكثفة بالوصل بين لبوسيها بواسطة ناقل ، فإن كل الإلكترونات تعود إلى أماكنها من اللبوس السالب إلى الموجب ، فيحدث توازن كهربائي وتنعدم شحنتا اللبوسين ، فتصبح المكثفة فارغة .

e^-

تفريغ المكثفة

2 - أ) لدينا $q = I\,t$ شدة التيار ثابتة (المولد المستعمل هو مولد للتيار)

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I = \frac{dq}{dt}$$

ب) بعد زمن قدره $t = 4\ mn = 240\ s$ تكون $q = 0{,}2 \times 10^{-3} \times 240 = 4{,}8 \times 10^{-2}\ C$

التوتر الكهربائي بين اللبوسين $u = \dfrac{q}{C} = \dfrac{4{,}8\times10^{-2}}{3{,}2\times10^{-3}} = 15\ V$

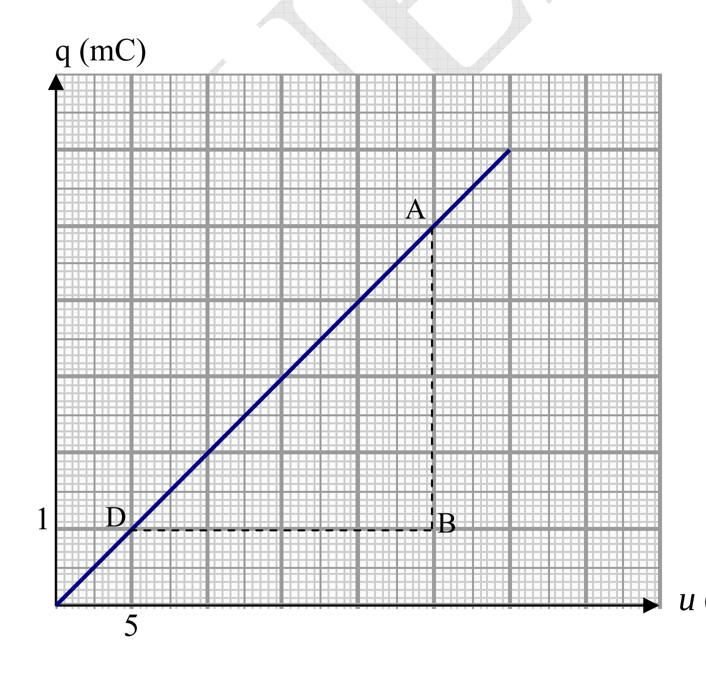
3 - الزمن الأعظم للشحن : لدينا $q = I\,t$ أي $C\,u = I\,t$ وبالتالي : $t = \dfrac{Cu}{I} = \dfrac{3{,}2\times10^{-3}\times40}{0{,}2\times10^{-3}} = 640\ s$

التمرين 07

1 - العلاقة هي : $q = C\,u$

ميل البيان هو سعة المكثفة C

$$C = \frac{AB}{BD} = \frac{4\times10^{-3}}{5\times4} = 2\times10^{-4}\ F$$



2 – من البيان لدينا القيمة $u_1 = 15\ V$ توافق شحنة قدرها

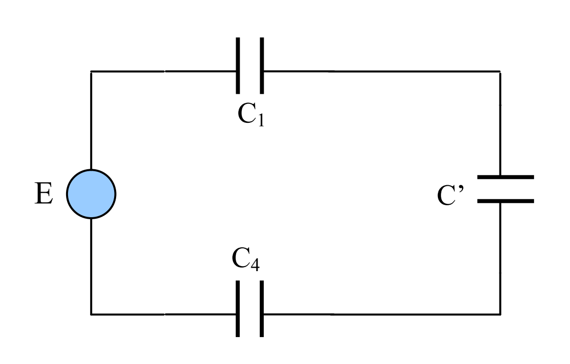
$q_1 = 3 \times 10^{-3}\ C$

من العلاقة $q_1 = I\,t_1$ نستخرج $t_1 = \dfrac{q_1}{I} = \dfrac{3\times10^{-3}}{15\times10^{-6}} = 200\ s$

3 - $u_1 = \dfrac{q_1}{C}$ ، $u_2 = \dfrac{q_2}{C}$ نستنتج :

$\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{It_1}{It_2} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{15}{30}$ ، وبالتالي $t_2 = 2\,t_1$

التمرين 08



1 – سعة المكثفة المكافئة : لدينا C_2 و C_3 على التفرع ، إذن سعتهما المكافئة :

$$C' = C_3 + C_2 = 0,5 + 1,5 = 2\ \mu F$$

بتعويض هاتين المكثفتين بمكافئتهما نحصل على الدارة المقابلة .

لدينا الآن 3 مكثفات موصولة على التسلسل ، سعتها المكافئة هي C ، حيث :

$\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_4} + \dfrac{1}{C'}$ ، وبالتطبيق العددي نجد $C = 0,8\ \mu F$

2 – شحنة المكثفة المكافئة : $Q = C\,U = 0,8 \times 10^{-6} \times 100 = 8 \times 10^{-5}\ C$

3 – شحنة كل مكثفة : بما أن C_1 و C_4 و C' كلها على التسلسل ، إذن شحناتها متساوية ، أي :

$$Q_1 = Q_4 = Q' = 8 \times 10^{-5}\ C$$

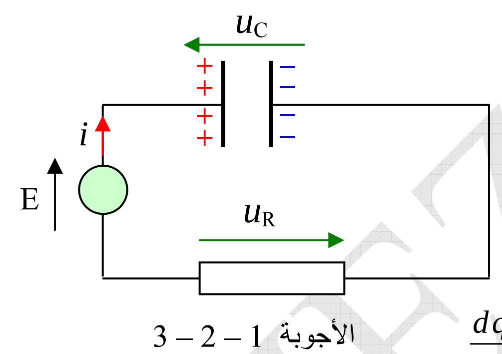
بما أن C_2 و C_3 على التفرّع ، إذن مجموع شحنتيهما يساوي شحنة C' ، أي : $Q_2 + Q_3 = 8 \times 10^{-5}$ (1)

التوتران بين طرفيهما متساويان $U_2 = U_3$ لأنهما على التفرّع : $\dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{Q_3}{C_3}$ (2)

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج : $Q_2 + \dfrac{C_3}{C_2} Q_2 = 8 \times 10^{-5}$

$Q_2 + \dfrac{1,5}{0,5} Q_2 = 8 \times 10^{-5}$ ، ومنه $Q_2 = 2 \times 10^{-5}\ C$. بالتعويض في (1) أو (2) نجد $Q_3 = 6 \times 10^{-5}\ C$

التمرين 09



الأجوبة 1 – 2 – 3

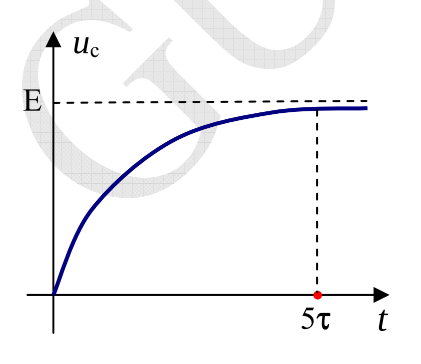
4 - حسب قانون جمع التوترات لدينا $E = u_R + u_C = R\,i + u_C$

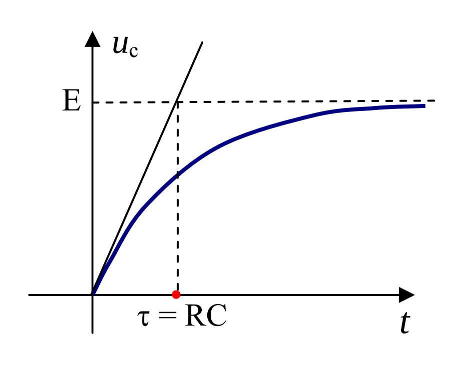
$E = u_C + R\dfrac{dq}{dt} = u_C + RC\dfrac{du_C}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على R C

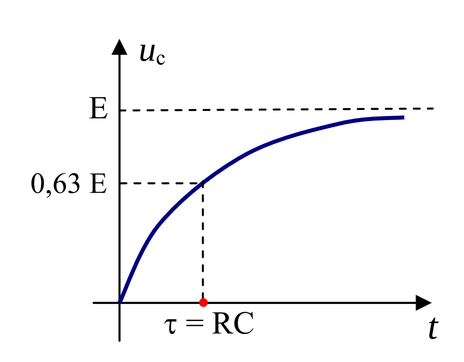
نكتب المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{E}{RC}$

أو المعادلة التفاضلية التي تخضع لها الشحنة الكهربائية في لبوسي المكثفة : $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q = \dfrac{E}{R}$

5 – الطرق الثلاثة لتحديد ثابت الزمن بيانيا : نأخذ مثلا $u_C = f(t)$

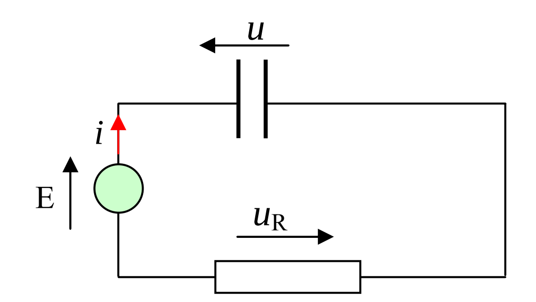






6 - $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{3}{6000} = 0,5 \times 10^{-3}\ F$

التمرين 10

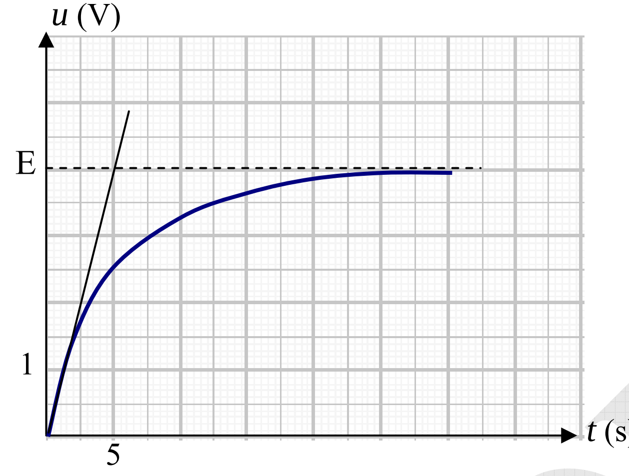


حسب قانون جمع التوترات فإن : $E = R\,i + u$ ، ومنه $i = \dfrac{E - u}{R}$ (1)

2 - من البيان نستنتج $E = 4\ V$ ، وهي أكبر قيمة لـ u (بداية النظام الدائم) .

نستخرج من البيان قيم u الموافقة للأزمنة المسجّلة على الجدول ، ثم باستعمال العلاقة (1) نحسب شدة التيار الموافقة لكل لحظة .

مثلا : من أجل $t = 0$ لدينا من البيان $u = 0$ ، وبالتالي : $i = \dfrac{E-0}{R} = \dfrac{4}{20 \times 10^3} = 2 \times 10^{-4}\ A$ ، وهكذا ..



الجدول :

t (s)	0	5	10	15	20	25
$i \times 10^{-4}$ (A)	2,00	0,75	0,31	0,12	0,06	0,00

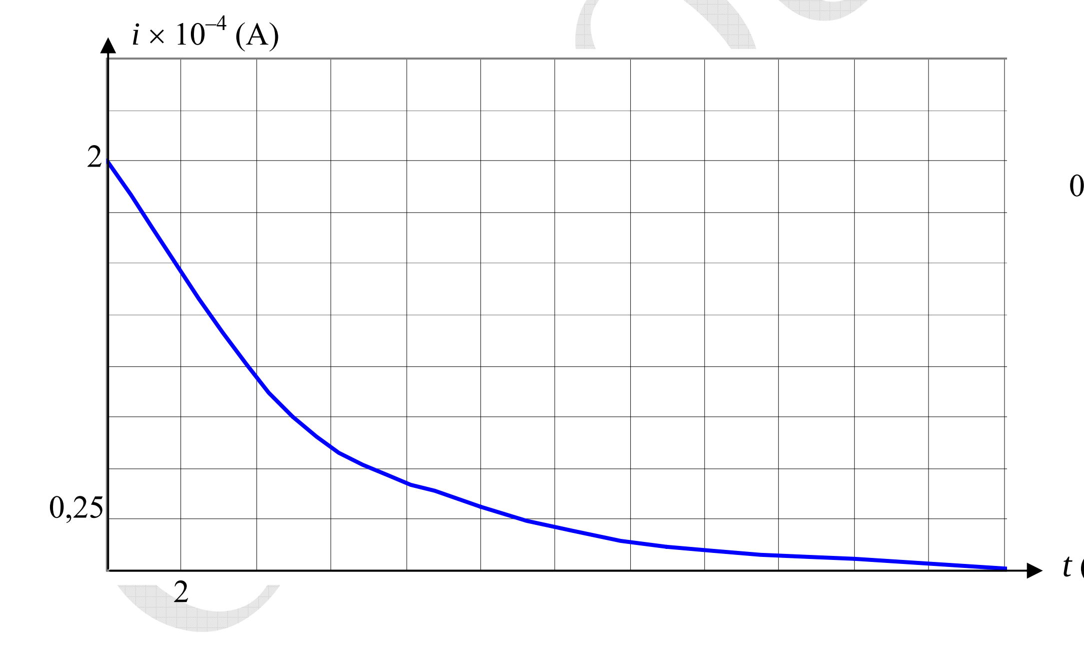
3 – ثابت الزمن هو فاصلة تقاطع مماس البيان مع المستقيم الأفقي $u = E$

نستنتج $\tau = 5\ s$

4 - نستنتج قيمة السعة من عبارة ثابت الزمن :

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{5}{20 \times 10^3} = 2{,}5 \times 10^{-4}\ F$$

5 – رسم البيان $i = f(t)$:



6 - تتناقص شدة التيار من أعظم قيمة $I = 2 \times 10^{-4}\ A$ نحو القيمة 0

يحدث هذا خلال فترة الشحن .

التمرين 11

1 – الشحنة الكلية للمكثفة $Q = 0$ ، أي $Q_A + Q_B = 0$ ، ومنه : $Q_B = -Q_A = +1{,}2\ mC$

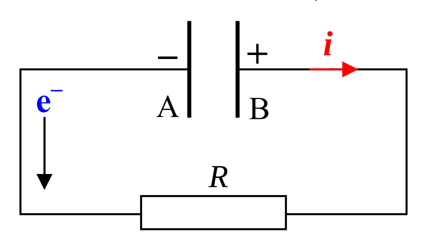
2 - لدينا حسب إشارتي اللبوسين : $U_{BA} > 0$ ، إذن $U_{AB} < 0$

– A + B

3 -

- عندما نربط المكثفة تتفرغ في الناقل الأومي بحيث تنتقل الإلكترونات من اللبوس A نحو B

- جهة التيار الانتقالي عكس جهة حركة الإلكترونات وعكس الجهة الاصطلاحية للتيار (جهة تيار الشحن) .



- لدينا العلاقة : $\ln u_{BA} = -50\,t + 1{,}61$ (1)

نعلم أن عبارة التوتر بين طرفي المكثفة خلال التفريغ هي $u_{BA} = u_c = E\,e^{-\frac{1}{RC}t}$ (2)

بادخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي العلاقة (2) :

$$\ln u_{BA} = \ln E - \frac{1}{RC}t$$

$$\ln u_{BA} = -\frac{1}{RC}t + \ln E \qquad (3)$$

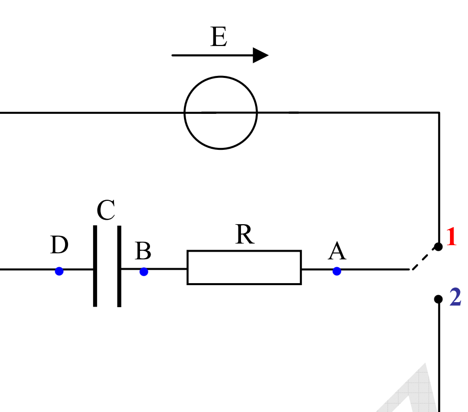
بمطابقة العلاقتين (1) و (3) ، نكتب : $\frac{1}{RC} = 50 \Rightarrow RC = \frac{1}{50} = 0{,}02\ s = \tau$

$\ln E = 1{,}61 \Rightarrow E = e^{1{,}61} = 5\ V$

التمرين 12



1 - أ) حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين طرفي ثنـائي القطب RC :



$$E = u_{AB} + u_{BD} = R\,i + u_{BD}$$

$$E = u_{BD} + RC\frac{du_{BD}}{dt}$$

المعادلة التفاضلية هي $\frac{du_{BD}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{BD} = \frac{E}{RC}$ (1)

ب) لدينا : $u_{BD} = E + Ae^{-bt}$ (2)

نعوّض في المعادلة التفاضلية (1)

$$-Abe^{-bt} + \frac{1}{RC}\left(E + Ae^{-bt}\right) = \frac{E}{RC}$$

$$-Abe^{-bt} + \frac{E}{RC} + \frac{1}{RC}Ae^{-bt} = \frac{E}{RC}$$

إذا كان $b = \frac{1}{RC}$ نجد $\frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$ ، وهي محققة ، إذن حل المعادلة التفاضلية (1) هو من الشكل : $u_{BD} = E + Ae^{-bt}$.

جـ) من الشروط الإبتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_{BD} = 0$. نعوض في العلاقة (2) : $0 = E + Ae^{0} \Rightarrow A = -E$

2 – تكملة الجدول : عبارة التوتر بين طرفي المكثفة : $u_{BD} = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

$t = 0 \Rightarrow u_{BD} = 0$

$t = \tau \Rightarrow u_{BD} = E\,(1 - e^{-1}) = 3{,}78\ V$

$t = 5\,\tau \Rightarrow u_{BD} = E\,(1 - e^{-5}) \approx 6\ V$

t (s)	0	τ	5 τ
u_{BD}	0	3,78	6

3 – تمثيل البيان $u_{BD} = f(t)$

لدينا $\tau = RC = 10^5 \times 0{,}1 \times 10^{-6} = 0{,}01 \text{ s}$

4 - أ) عند وضع البادلة في الوضع 2 تُفرّغ المكثفة في الناقل الأومي وتُنفق الطاقة التي كانت مخزّنة فيها على شكل حرارة بفعل جول في أسلاك الوصل .

ب) الطاقة المخزّنة هي : $E_C = \frac{1}{2} C u^2$ ، حيث $u = E$. $E_C = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 10^{-6} \times 6^2 = 1{,}8 \times 10^{-6} \text{ J}$

التمرين 13

1 - حسب قانون جمع التوترات : $u_R + u_C = 0$

$$R\,i + u_C = 0$$

$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ ، وبتقسيم طرفي هذه المعادلة نكتب : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$ (1)

2 - إن حل هذه المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $q = Ae^{\alpha t} + B$ (2)

حيث : A ، B ، α عبارة عن ثوابت .

لكي نحدّد قيمتي B ، α نعوّض في المعادلة (1) : $q = Ae^{\alpha t} + B$ و $\frac{dq}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$ ، ونكتب بذلك :

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = 0$$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = 0 \qquad (3)$$

حتى تكون المعادلة (3) محققة يجب أن يكون $\alpha = -\frac{1}{RC}$ و $B = 0$

نستنتج A من المعادلة (2) ، حيث تكون عند اللحظة $t = 0$ شحنة المكثفة $q = Q_0$.

بالتعويض : $Q_0 = Ae^0 + B$ ، وبالتالي $A = Q_0$. $\boldsymbol{q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}$

3 - ميل المماس عند النقطة (0 ; CE) هو مشتق العلاقة q (t) عند $t = 0$

ميل المماس : $tg\alpha = -\dfrac{OB}{OA} = -\dfrac{CE}{OA}$

مشتق q (t) هو $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}t} = -\dfrac{CE}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}t} = -\dfrac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

وعند $t = 0$ يكون المشتق : $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = -\dfrac{E}{R}$

$-\dfrac{CE}{OA} = -\dfrac{E}{R}$ ، ومنه : OA = RC ، إذن فاصلة النقطة A هي : $\boldsymbol{t = \tau}$

4 – من البيان لدينا τ = 20 ms (تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع محور الزمن)

5 – من عبارة ثابت الزمن لدينا : $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{20\times10^{-3}}{10^{5}} = 2\times10^{-7}\ F = 0{,}2\ \mu F$

6 – عند اللحظة t = 0 تكون الشحنة $q = Q_0 = C\,E = 2 \times 10^{-7} \times 5 = 10^{-6}$ C

عند اللحظة t = 5 τ تكون الشحنة $q = Q_0 \times e^{-5} = 10^{-6} \times 6{,}7 \times 10^{-3} = 6{,}7\ \eta$C

7 - عبارة شدة التيار هي $i = \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$

$t = 0 \Rightarrow i = -\,50\ \mu$ A

$t = 5\,\tau \Rightarrow i = -\,0{,}33\ \mu$ A

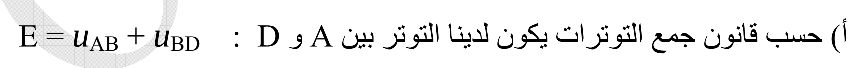
الجهة الاصطلاحية للتيار



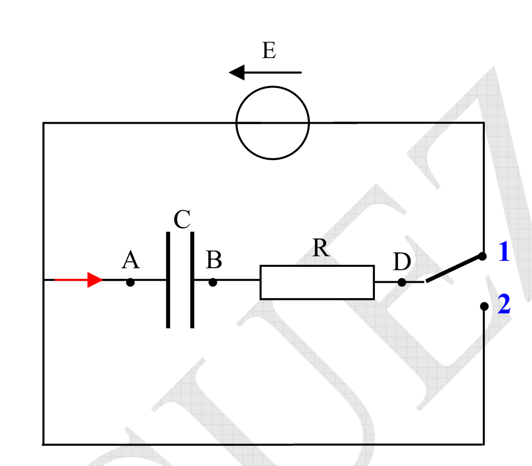
التمرين 14



1 – المعادلة التفاضلية التي يخضع لها التوتر u_{AB}



أ) حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين A و D : $E = u_{AB} + u_{BD}$



$$E = u_{AB} + RC\,\frac{du_{AB}}{dt}$$

بتقسيم طرفي المعادلة على RC ، نكتب : $\dfrac{du_{AB}}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_{AB} = \dfrac{E}{RC}$ (1)

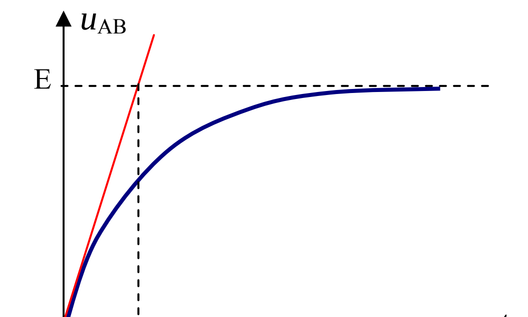
ب) لدينا حل هذه المعادلة هو $u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ (2)

نتحقق من ذلك بالتعويض في المعادلة (1) :

$$-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC}\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = \frac{E}{RC}$$

$$-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} + \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{RC}$$

ومنه $\dfrac{E}{RC} = \dfrac{E}{RC}$ ، إذن المعادلة محققة ، ومنه حل المعادلة التفاضلية (1) هو المعدلة (2) .



جـ) تمثيل كيفي لـ $u_{AB} = f(t) = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

د) دلالة تقاطع المماس في المبدأ للبيان مع المستقيم $u_{AB} = E$ هو ثابت الزمن τ

هـ) $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 0,5 \times 10^{-6} = 5,0 \times 10^{-3}$ s

و) عند $t = 0$ يكون : $u_{AB} = E\,(1-1) = 0$

عند $t = 5\,\tau$ يكون : $u_{AB} = E\left(1-\frac{1}{e^5}\right) \approx 100\ V$

2 - أ) إذا كان المقصود هو المعادلة التفاضلية التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة ، فها هي :

المكثفة تُفرّغ في هذه الحالة :

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين A و D : $0 = u_{AB} + u_R$

$$0 = u_{AB} + RC\,\frac{du_{AB}}{dt}$$

بتقسيم طرفي المعادلة على RC ، نكتب : $\frac{du_{AB}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{AB} = 0$

هذه معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $u_c = Ae^{\alpha t} + B$ (4)

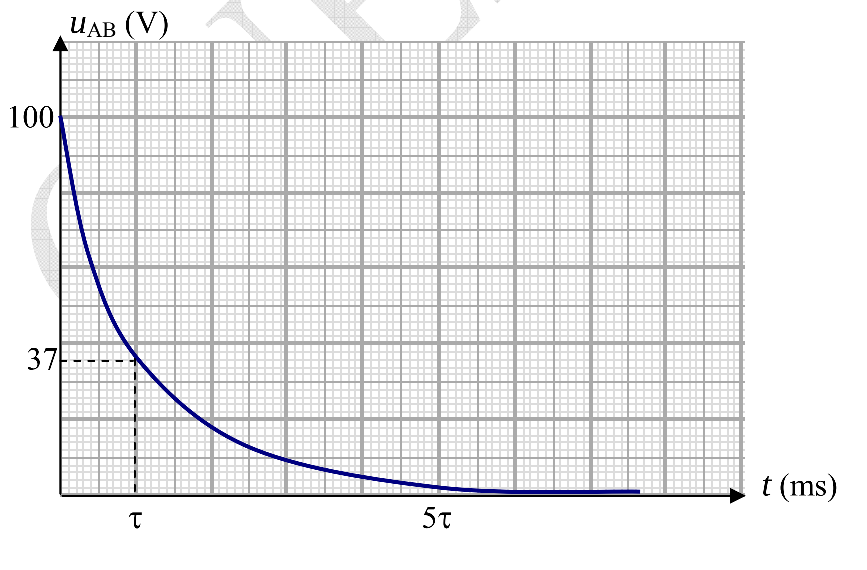
من (3) و (4) نكتب : $A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = 0$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = 0$$

حتى تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون : $\alpha = -\frac{1}{RC}$ و $B = 0$

من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_c = E$ ، وبالتعويض في (4) نجد $A = E$

$$\boldsymbol{u_{AB} = E\ e^{-\frac{1}{RC}t}}$$



ب)

t (s)	u_{AB} (V)
0	E = 100
τ	0,37 E = 37
5 τ	$6,7 \times 10^{-3}$ E = 0,67
∞	0

التمرين 15

1 – شحنة المكثفة : لدينا $Q = C\,U$ (1)

الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_c = \frac{1}{2} Q U$ (2)

بتعويض عبارة U من العلاقة (1) في العلاقة (2) نجد $E_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ، ومنه :

$$Q = \sqrt{2E_c C} = \sqrt{2 \times 1{,}5 \times 2 \times 10^{-3}} = 7{,}7 \times 10^{-2}\ C$$

2 – التوتر بين طرفي المكثفة : $U = \frac{Q}{C} = \frac{7{,}7 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}} = 38{,}5\ V$

التمرين 16

1 - $E_c = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-3} \times 12 = 24 \times 10^{-3}\, J$

2 – لدينا $Q = C\,U$ ، فإذا ضاعفنا السعة يصبح لدينا $Q' = 2\,C\,U$ ، وبالتالي $Q' = 2\,Q$.

ولدينا : $E'_c = \frac{1}{2} Q' U = \frac{1}{2} \times 2 Q U = Q U = 2 E_c$ ، وبالتالي الطاقة تتضاعف كذلك وتصبح $E'_c = 48 \times 10^{-3}$ J

3 – عندما نفرّغ المكثفة يتطور التوتر بين طرفيها حسب العلاقة : $u_c = E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

وتكون حينئذ الطاقة المخزنة في الوشيعة $E_c = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C \left(E\, e^{-\frac{1}{RC}t} \right)^2$

$$E_c = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2}{RC}t} = \frac{1}{2} Q_0 \times \frac{Q_0}{C}\, e^{-\frac{2}{RC}t}$$

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\, e^{-\frac{2}{\tau}t}}$$

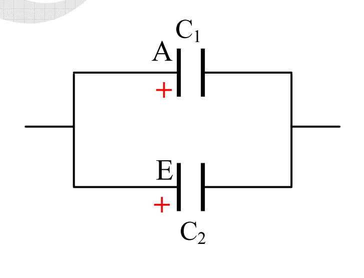
4 – عند اللحظة $t = \tau$ ، تكون الطاقة المخزنة في الوشيعة (الباقية)

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\, e^{-2} = \frac{1}{2}\frac{\left(4 \times 10^{-3}\right)^2}{\frac{4 \times 10^{-3}}{12}} e^{-2} = \frac{24 \times 10^{-3}}{e^2} = 3{,}25 \times 10^{-3}\, J$$

التمرين 17

1 – الطاقة المخزنة في المكثفة : $E_C \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2}\left(3{,}3 \times 10^{-6}\right) \times (24)^2 = 9{,}5 \times 10^{-4}\ J$

2 - أ) العلاقة بين q_A , q'_A , q'_E :



الشحنة تتوزع على المكثفتين حسب سعتيهما ، أي أن : $q_A = q'_E + q'_A$

ب) المكثفتان على التفرع ، إذن التوتران بين طرفيهما متساويان : $U_1 = U_2$

ومنه العلاقة المطلوبة : $\frac{q'_A}{C_1} = \frac{q'_E}{C_2}$

3 – لدينا : $q_A = C_1 U = 3,3 \times 10^{-6} \times 24 = 7,92 \times 10^{-5}$ C

$$q'_E + q'_A = 7,92 \times 10^{-5} \quad (1)$$

لدينا جملة معادلتين ذات مجهولين ، هما q'_E , q'_A

$$\frac{q'_A}{C_1} = \frac{q'_E}{C_2} \quad (2)$$

من العادلة (2) نستنتج $q'_A = \frac{C_1}{C_2} q'_E = \frac{3,3}{2,2} q'_E = 1,5 q'_E$ (3)

بالتعويض في (1) : $q'_E + 1,5\ q'_E = 7,92 \times 10^{-5} \Rightarrow q'_E = 3,17 \times 10^{-5}\ C$

بالتعويض في (3) نجد $q'_A = 4,71 \times 10^{-5}\ C$.

4 – الطاقة المخزّنة في المكثفتين بعد ربطهما : (شحنة المكثفة المكافئة هي q_A) $E_c = \frac{1}{2} q_A U$ (4)

نحسب التوتر بين طرفي كل مكثفة ، والذي هو التوتر بين طرفي المكثفة المكافئة ، $U_1 = U_2 = \frac{q'_A}{C_1} = \frac{4,71 \times 10^{-5}}{3,3 \times 10^{-6}} = 14,3\ V$

بالتعويض في (4) : $E'_c = \frac{1}{2} \times 7,92 \times 10^{-5} \times 14,3 = 5,66 \times 10^{-4}\ J$

5 – أ) هذا الفرق في الطاقة تحوّل إلى عمل ، وهو العمل الذي أنجزناه عندما قمنا بربط المكثفتين . $\Delta E = E'_c - E_c = -W$

ب) كمية الطاقة الضائعة : $\Delta E = (9,5 - 5,66) \times 10^{-4} = 3,84 \times 10^{-4}\ J$

الجزء الثاني - ثنائي القطب RL

التمرين 18

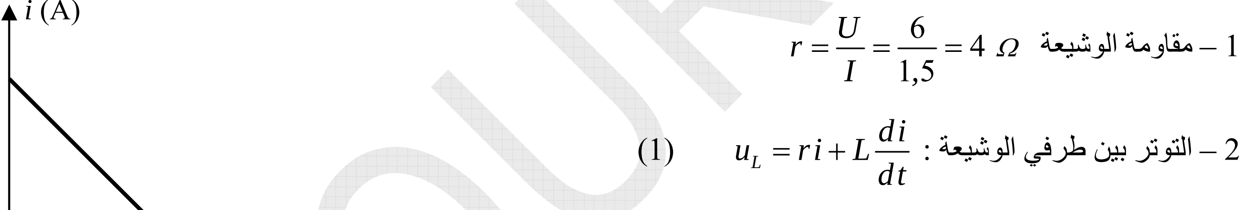
1 – التوتر بين طرفي الوشيعة في النظام الدائم $U_L = r\,I = 6 \times 1{,}5 = 9\ V$

2 – المولد المستعمل في هذه الدارة هو مولد للتيار . لما نقصّر الدارة (عزل المولد) تنتقل شدة التيـار من القيمة I إلى الصفر لحظيا ، لا تمر بمرحلة انتقالية .

تنشأ في الوشيعة قوة محركة كهربائية $e = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = -\dfrac{0-1{,}5}{2{,}5\times10^{-3}} = 600V$

نلاحظ أن فرق الكمون بين طرفي الوشيعة في مدة قطع التيار يكون مرتفعا جدا ، أما استنتاجنا هو بامكان هذا التوتر العالي أن يخرب أجهزة كهربائية تحتوي على وشائع عندما نقطع التيار ، لهذا يجب أن تُحفظ هذه الأجهزة بربط نواقل أومية أو صمامات تجعل على إخماد هذا التوتر العالي .

التمرين 19



1 – مقاومة الوشيعة $r = \dfrac{U}{I} = \dfrac{6}{1{,}5} = 4\ \Omega$

2 – التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_L = ri + L\dfrac{di}{dt}$ (1)

$\dfrac{di}{dt}$ هو ميل المستقيم $i = f(t)$ ، حيث $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{3}{1{,}5} = -2A.s^{-1}$

في اللحظة $t = 0{,}5\ s$ يكون $i = 2\ A$

بالتعويض في العلاقة (1) : $u_L = 4 \times 2 - 0{,}1 \times 2 = 7{,}8\ V$

التمرين 20

التوتر بين طرفي الوشيعة : لدينا عبارة شدة التيار $i = 10\,t - 3$ ، إذن $\dfrac{di}{dt} = 10\ A.s^{-1}$

$$u_L = ri + L\frac{di}{dt} = 8(10t-3) + 10L = 80t - 24 + 10L$$

عند $t = 0{,}15\ s$ يكون $u_L = 0$ ، إذن $10\,L = 24 - 12$ ، وبالتالي $L = 1{,}2\ H$

التمرين 21

1 – التيار الذي مررناه في الوشيعة هو تيار متغيّر ودوري ، حيث أن دوره 20 ms .

2 –

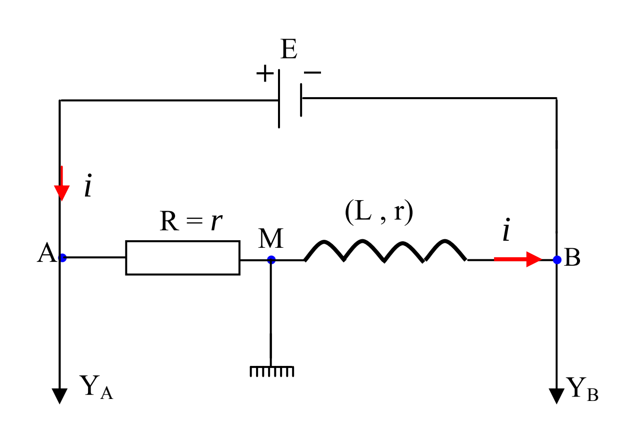
- في المجال $[0, 10s]$ ، $i = f(t)$ عبارة عن مستقيم ميله $a = \dfrac{0{,}4}{10^{-2}} = 40\ As^{-1}$ ، ويمر بالنقطة (0 , 0) ، إذن معادلة تغير شدة التيار في هذا المجال هي : $i = 40\,t$

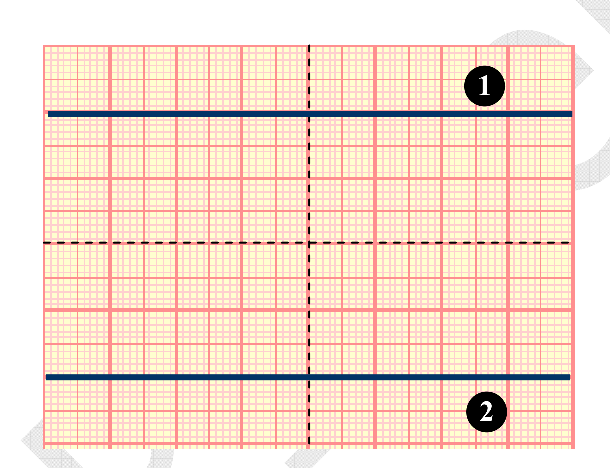
- في المجال $[10s,20s]$ ، $i = f(t)$ عبارة عن مستقيم ميله $a' = -\frac{0,4}{10^{-2}} = -40\ As^{-1}$ ، ويمر بالنقطة (20 s , 0) ، معادلة من الشكل $i = -40\,t + b$. عند $t = 20$ ms يكون $i = 0$ ، ومنه : $0 = -40 \times 0,02 + b$ ، وبالتالي $b = 0,8$ A

معادلة تغير شدة التيار في هذا المجال هي : $i = -40\,t + 0,8$

3 – التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_L = L\frac{di}{dt}$. $u_L = L \times 40$ ، ومنه $L = 10$ mH

التمرين 22





- 1

البيان (2) يمثّل التوتر بين طرفي الوشيعة U_{BM} ، لأن $U_{BM} < 0$ ، إذن الخط ينحرف إلى أسفل الشاشة (انظر لجهة i) .

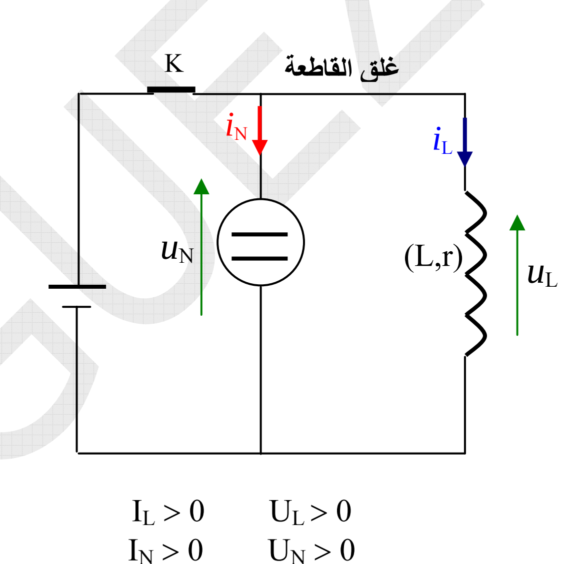
البيان (1) يمثّل التوتر بين طرفي الناقل الأومي U_{AM} ، لأن $U_{AM} > 0$ ، إذن الخط ينحرف إلى أعلى الشاشة .

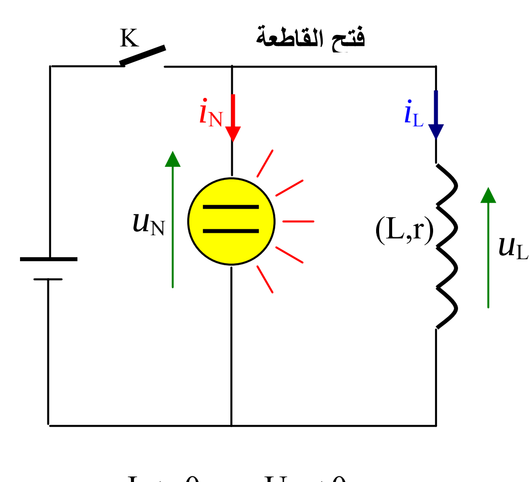
2 – تتصرّف الوشيعة كناقل أومي (نظام دائم) .

3 – شدة التيار المار في الدارة $I = \frac{U_R}{R} = \frac{3 \times 2}{12} = 0,5\ A$

4 – قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد (E) : حسب قانون أوم : $E = (R + r)\,I = 24 \times 0,5 = 12$ V

التمرين 23





$I_L > 0$ $U_L > 0$
$I_N > 0$ $U_N > 0$

$I_L > 0$ $U_L < 0$
$I_N < 0$ $U_N < 0$

1 - عندما نغلق القاطعة يمر تيار شدّته I_L في الوشيعة وتيار آخر شدته I_N في المصباح ، بحيث يكون $U_N = U_L = E = 12$ V

2 - المصباح لا يشتعل لأن التوتر بين طرفيه أقل من 220 V .

من المفروض يمر في الوشيعة تيار شدته $I_L = \frac{U_L}{r} = \frac{12}{6} = 2\ A$

من المفروض أن تكون ذاتية الوشيعة أكبر من 0,4 H (ما دامت تحتوي على نواة حديدية) حتى تخزّن طاقة أكبر تُستعمَل في إشعال المصباح عند فتح القاطعة .

عند فتح القاطعة تبقى جهة التيار في الوشيعة كما كانت قبل فتح القاطعة (العكس في المكثفة) . إذن يمر في المصباح تيار شدته

$$\mathbf{I_N = -\, I_L}$$

فإذا كانت مقاومة المصباح كبيرة في تلك اللحظة ينشأ توتر كبير بين طرفيه $|U_N| = R_{N(0)} I_L$ حيث $R_{N(0)}$ هي مقاومة المصباح في اللحظة $t = 0$ ، وبالتالي نلاحظ إنارة شديدة في المصباح لمدة قصيرة ثم ينطفئ (لا ننسى أن مقاومة المصباح ليست ثابتة أثناء اشتغاله)

3 - إن المولّد المستعمل هو مولد للتوتر ، إذن عندما نفتح القاطعة يمر التوتر بين طرفي المصباح بمرحلة انتقالية من القيمة 12 V إلى القيمة 0 . ونفس الشيء بالنسبة لشدة التيار في المصباح .

لو عرفنا قيمة مقاومة المصباح لحظة فتح القاطعة لعرفنا قيمة التوتر بين طرفي الوشيعة

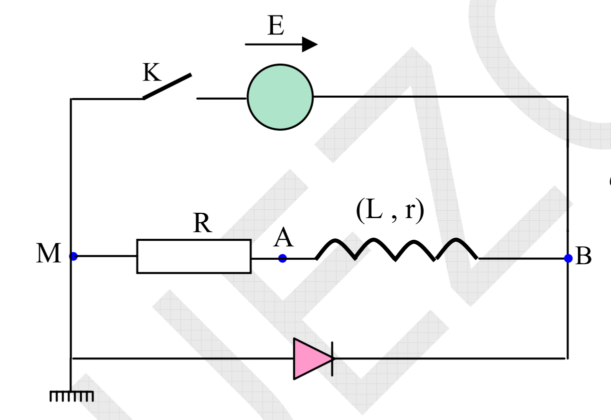
ثابت الزمن عند تطبيق التيار يختلف في هذه الحالة عن ثابت الزمن عند قطع التيار ، $\tau_1 = \frac{L}{r}$ ، $\tau_2 = \frac{L}{R_0 + r}$ ، حيث

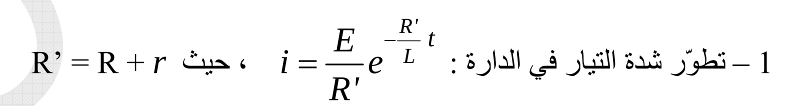
R_0 هي قيمة مقاومة المصباح لحظة فتح القاطعة ، ومنه τ_2 لا معنى له !!!!

التوتر بين طرفي الوشيعة لا يتغير بهذه العلاقة $u_L = E\, e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{r}{R} - 1\right)$ ، لأن $R = R_0 + r$ تتغير مع الزمن كذلك ،

وبالتالي لا يمكن معرفة التوتر بين طرفي الوشيعة في لحظة ما .

التمرين 24





1 – تطوّر شدة التيار في الدارة : $i = \frac{E}{R'} e^{-\frac{R'}{L}t}$ ، حيث $R' = R + r$

انظر للدرس كيف وجدنا هذه العلاقة عند قطع التيار (صفحة 8 من درس ثنائي القطب RL) .



2 - أ) التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R = R\, i$

$$u_R = R\frac{E}{R'} e^{-\frac{R'}{L}t}$$

u_0 هو التوتر بين طرفي الناقل الأومي في اللحظة $t = 0$ ، أي : $u_0 = R\frac{E}{R'} e^0 = R\frac{E}{R'}$

عند اللحظة t_1 : $u_R = 0{,}9\ u_0 = R\frac{E}{R'} e^{-\frac{R'}{L}t_1}$ (1)

عند اللحظة t_2 : $u'_R = 0{,}1\ u_0 = R\frac{E}{R'} e^{-\frac{R'}{L}t_2}$ (2)

بتقسيم العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد : $9 = e^{(t_2 - t_1)\frac{R'}{L}}$ ، وبادخال اللوغاريتم النبيري على طرفي هذه العلاقة ، نكتب :

$ln\ 9 = (t_2 - t_1) \times \frac{R'}{L}$ ، ومنه $\frac{R'}{L} = \frac{ln\ 9}{t_2 - t_1}$ ، ولدينا ثابت الزمن $\tau = \frac{L}{R'}$ ، إذن

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{ln\ 9} = \frac{1{,}65 \times 10^{-3}}{2{,}2} = 0{,}75 \times 10^{-3}\ s$$

ب) ذاتية الوشيعة : $L = R' \times \tau = (R + 0) \times \tau = 1000 \times 0{,}75 \times 10^{-3} = 0{,}75\ H$.

ملاحظة :

الهدف من وضع الصمام في الدارة وتوجيهه بهذا الشكل هو منع حدوث الشرارة الكهربائية التي تظهر عند القاطعة عند فتحها .

سبب وجود هذه الشرارة : لو لم يوجد الصمــام أين تذهب الطاقة المغناطيسية التي كانت مخزنة في الوشيعة لحظة فتح القاطعة؟

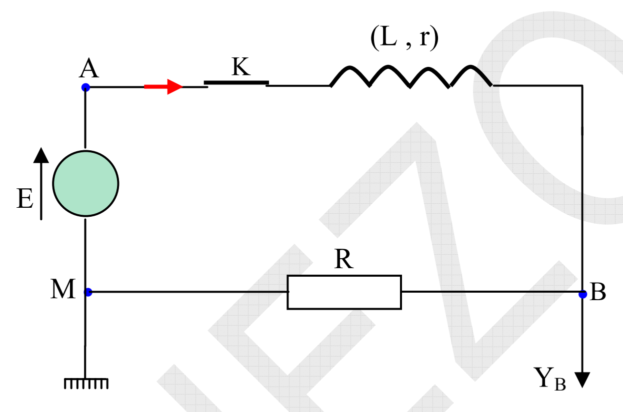
إن فتح القاطعة يخلق مقاومة كبيرة جدا متكونة من حيّز من الهواء موجود بين فكّي القاطعة ، إذن تصوّر هذه المقاومة الكبيرة مضروبة في شدة التيار التي كانت تمر في الوشيعة قبل فتح القاطعة ، فإنها تعطي توترا كبيرا بين طرفي القاطعة ، بحيث تفرّغ طاقة الوشيعة على شكل طاقة كهرومغناطيسية (ضوء) و هذا الذي نشاهده ...

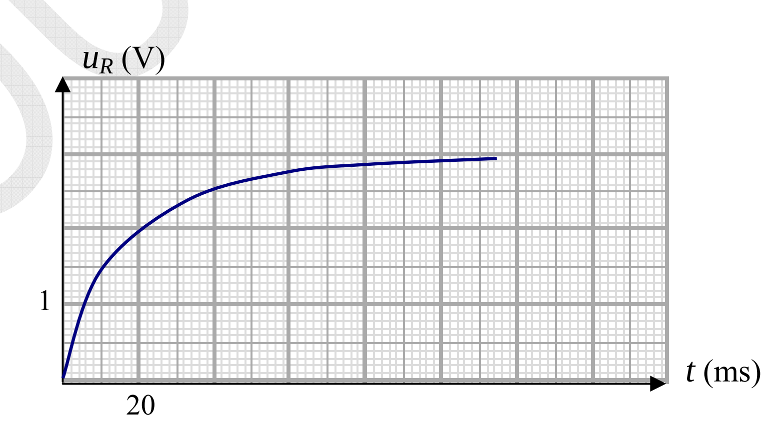
يمكن لهذه الطاقة أن تخرّب أجهزة أخرى مربوطة وراء القاطعة ، مثل بطاقة الحبكة المعلوماتية التي ترفق تركيب التجربة بجهاز الكمبيوتر .

الصمام يمرر التيار الكهربائي في نفس الدارة ويحمي الأجهزة الأخرى .

التمرين 25

1 – التوتر الذي يظهر في المدخل Y_B هو التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R = R\ i$





2 – في النظام الدائم يكون (من البيان) $u_R = 3\ V$ ، ولدينا قانون أوم في ناقل أومي $u_R = R\ I_0$ ، $I_0 = \frac{3}{50} = 0{,}06\ A$

3 – حسب قانون جمع التوترات : $E = u_R + u_L$ ، أي $E = Ri + ri + L\frac{di}{dt}$

4 – في النظام الدائم يكون $E = (R + r)\ I_0$ ، ومنه : $r = \frac{E}{I_0} - R = \frac{3{,}8}{0{,}06} - 50 = 13{,}3\Omega$

لحساب ذاتية الوشيعة نحسب أولا ثابت الزمن ، وذلك من البيان $u_R = f(t)$ ، حيث أن عند الزمن $t = \tau$ يكون :

$U_R = 0{,}63 \times 3 \approx 2\ V$ ، وهذا يوافق $\tau = 20\ ms$.

ذاتية الوشيعة $L = R' \times \tau = (R + r) \times \tau = 63{,}3 \times 20 \times 10^{-3} = 1{,}27\ H$

التمرين 26

1 – المعادلة التفاضلية لشدة التيار عند تطوّره نحو قيمة ثابتة غير معدومة معناه المعادلة أثناء تطبيق التيار .

حسب قانون جمع التوترات في ثنائي القطب RL ، نكتب : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ (الوشيعة صافية ، أي $r \approx 0$)

بتقسيم طرفي هذه المعادلة على L ، نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$ (1)

2 – لدينا حل المعادلة التفاضلية (1) هو : $i(t) = a + be^{-\alpha t}$ (2)

نعوّض في المعادلة (1) : $-\alpha b e^{-\alpha t} + \dfrac{R}{L}\left(a + be^{-\alpha t}\right) = \dfrac{E}{L}$

$$\frac{R}{L}a + be^{-\alpha t}\left(\frac{R}{L} - \alpha\right) = \frac{E}{L}$$

حتى تكون هذه المعادلة محققة ، يجب أن يكون : $\dfrac{R}{L} - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{R}{L}$ ، و $\dfrac{R}{L}a = \dfrac{E}{L} \Rightarrow a = \dfrac{E}{R}$.

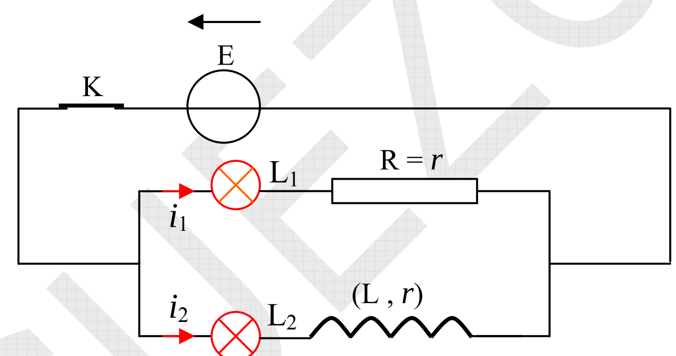
نعلم أنه عند $t = 0$ يكون $i = 0$. بالتعويض في المعادلة (2) : $0 = a + be^{0} = a + b \Rightarrow a = -b$

وبالتالي : $a = -b = \dfrac{E}{L}$

3 – الشدة العظمى للتيار : $I_0 = \dfrac{E}{R} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5\ A$

4 – ثابت الزمن : $\tau = \dfrac{L}{R}$ ، لكن L مجهولة !

التمرين 27



1 – عبارة التوتر في كل فرع :

الفرع (1) : $u_1 = (R + R_1)\, i_1$

الفرع (2) : $u_2 = (r + R_2)i_2 + L\dfrac{di_2}{dt}$

2 – في الفرع (1) : بمجرد غلق القاطعة يشتعل المصباح L_1

لأن الناقل الأومي لا يعرقل تطبيق التيار (ذاتية الناقل الأومي معدومة)

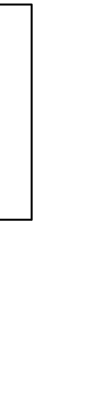
في الفرع (2) : الوشيعة تقاوم تطبيق التيار ، أي < ترفض > تغيّر شدة التيار فيها ، حيث تنشأ قوة كهربائية متحرضة تمرّر تيارا في الوشيعة عكس جهة التيار i_1 مما يزيد في مدّة تطبيق i_1 ، وبالتالي المصباح L_2 يشتعل بعد المصباح L_1 .

3 – في النظام الدائم يصبح $i_1 = i_2 = I$ ، لأن مقاومتي الفرعين متساويتان .

4 – الوسيلة العملية التي تبيّن لنا أن $i_1 = i_2$:

- إما مشاهدة قوة الإضاءة في المصباحين متماثلة (أقل دقة)
- أو بكل بساطة ربط مقياس أمبير في كل فرع وقراءة شدة التيار عليهما .

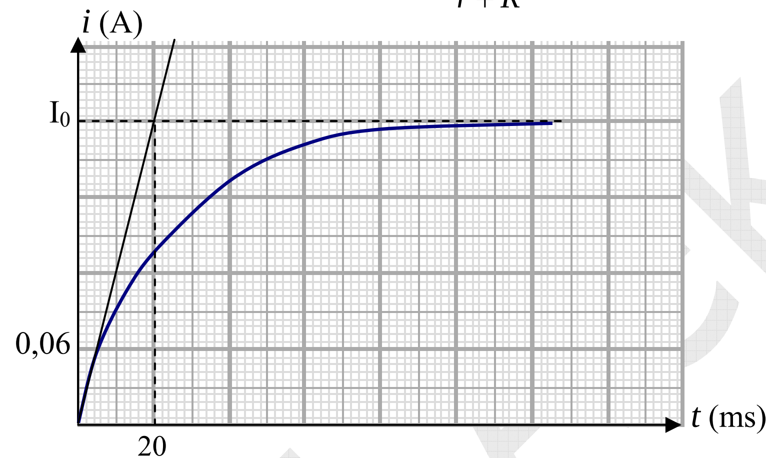
التمرين 28



مخطط الدارة الكهربائية

1- مخطط الدارة في الشكل المقابل .

2- في النظام الدائم $I = \dfrac{E}{r+R}$ (1)



2 – في النظام الدائم لدينا من البيان $I_0 = \dfrac{E}{R'}$ هي أعظم قيمة لـ i ، أي $I_0 = 0,06 \times 4 = 0,24$ A

بالتعويض في (1) : $R + r = \dfrac{12}{0,24} = 50\Omega$ ، ومنه $r = 50 - 35 = 15\ \Omega$

3 – من البيان لدينا فاصلة نقطة تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع مع المستقيم الأفقي $i = I_0$ هي $t = \tau = 20$ ms



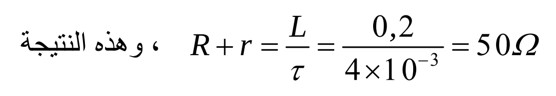
4 - أ) العبـارة البيانية هي : $L = a\,\tau$

a هو ميل المستقيم .

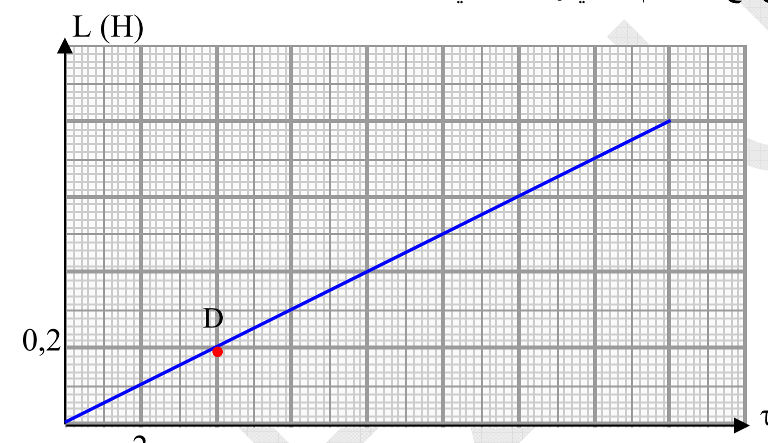
ب) ثابت الزمن من الدراسة النظرية هو $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

جـ) من البيان نأخذ نقطة كيفية ، مثلا النقطة (D) ، حيث

$L = 0,2$ H و $\tau = 4$ ms ونستنتج :



$R + r = \dfrac{L}{\tau} = \dfrac{0,2}{4\times 10^{-3}} = 50\Omega$ ، وهذه النتيجة تتفق مع المعطيات .



التمرين 29

1 – لدينا شدة التيار $i = 1,2\left(1 - e^{-2t}\right)$ ، حيث i بـ A و t بـ s

عند $t = 0$ يكون $i = 1,2\,(1 - 1) = 0$. شدة التيار معدومة إذن الطاقة معدومة لأن $E_b = \dfrac{1}{2} L i^2$

2 - نكتب عبارة الشدة كما يلي : $i = 1,2\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$

عند $t = \tau$ ، فإن $i = 1,2\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = 1,2\left(1 - \dfrac{1}{2,71}\right) = 1,2 \times 0,63 = 0,75\ A$.

الطاقة المخزّنة : $E_b = \frac{1}{2}Li^2 = 0,5\times0,1(0,75)^2 = 2,8\times10^{-2}J$

عندما $t\to\infty$ ، فإن $i = 1,2\left(1-e^{-\infty}\right) = 1,2(1-0) = 1,2A$

الطاقة المخزّنة : $E_b = \frac{1}{2}Li^2 = 0,5\times0,1(1,2)^2 = 7,2\times10^{-2}J$

3 - من عبارة شدّة التيار لدينا $\frac{1}{\tau} = 2$ ، ومنه $\tau = 0,5$ s . مقاومة الوشيعة هي $r = \frac{L}{\tau} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2\Omega$

التمرين 30

تمثّل هذه الحالة قطع التيار عن الوشيعة .

1 – لدينا المعادلة التفاضلية التي تخضع لها شدة التيار في الدارة : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$ (1)

هذه المعادلة التفاضلية لها حل من الشكل : $i = Ae^{\alpha t} + B$ (2)

لكي نحدّد B ، α نعوّض في المعادلة (1) : $i = Ae^{\alpha t} + B$ و $\frac{di}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{R}{L}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = 0$$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{R}{L}\right) + \frac{BR}{L} = 0$$

حتى تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون $\alpha = -\frac{R}{L}$ و $B = 0$

نستنتج A من المعادلة (2) ، حيث تكون عند اللحظة $t = 0$ شدة التيار في الوشيعة $i = \frac{E}{R}$.

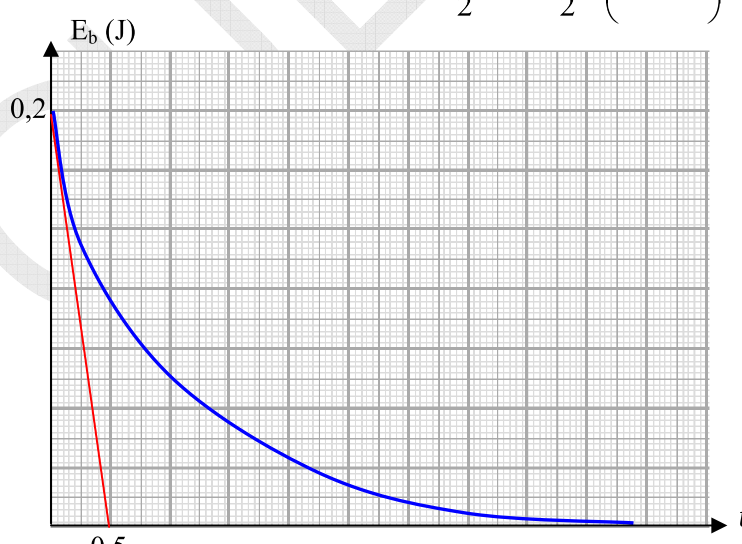
بالتعويض : $\frac{E}{R} = Ae^0 + B$ ، إذن $A = \frac{E}{R}$ ، وبالتالي حل المعادلة هو $i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ ، حيث $\frac{E}{R} = I_0$

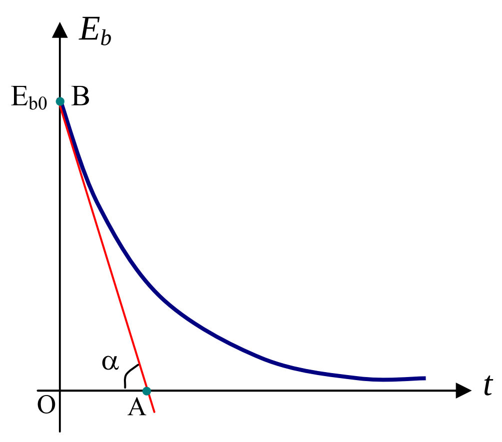
2 – الطاقة المخزّنة في الوشيعة بدلالة الزمن : $E_b = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2\, e^{-\frac{2R}{L}t}$

$$E_b = \frac{1}{2}LI_0^2\, e^{-\frac{2}{\tau}t}$$

الطاقة المخزّنة في الوشيعة من الشكل :

$E_b = E_{b0}\ e^{-\frac{2}{\tau}t}$ ، حيث $E_{b0} = 0,2$ J





3 - ميل المماس عند النقطة $(0\ ;\ E_{b0})$ هو مشتق العلاقة $E_b(t)$ عند $t = 0$

ميل المماس : $tg\alpha = -\dfrac{OB}{OA} = -\dfrac{E_{b0}}{OA}$

مشتق $E_b(t)$ هو $\dfrac{dE_{b0}}{dt} = -\dfrac{2E_{b0}}{\tau}\ e^{-\frac{2}{\tau}t}$

وعند $t = 0$ يكون المشتق : $\dfrac{dE_{b0}}{dt} = -\dfrac{2E_{b0}}{\tau}\ e^{-\frac{2}{\tau}0} = -\dfrac{2E_{b0}}{\tau}$

$-\dfrac{E_{b0}}{OA} = -\dfrac{2E_{b0}}{\tau}$ ، ومنه : $OA = \dfrac{\tau}{2}$ ، إذن فاصلة النقطة A هي : $t = \dfrac{\tau}{2}$

4 – لدينا $\dfrac{\tau}{2} = 0{,}5$ ، ومنه $\tau = 1\ \text{ms}$

مقاومة الدارة (الناقل الأومي والوشيعة) $R = 100\ \Omega$ ، ونعلم أن ثابت الزمن هو $\tau = \dfrac{L}{R}$ ، ومنه :

$L = R \times \tau = 100 \times 10^{-3} = 0{,}1\ \text{H}$

5 – الزمن اللازم لتناقص الطاقة إلى النصف :

عند اللحظة $t = 0$ كانت الطاقة المخزّنة في الوشيعة $E_b = \dfrac{1}{2}LI_0^2$. نحسب اللحظة t التي تكون فيها الطاقة نصف هذه الكمية

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}LI_0^2\right) = \dfrac{1}{2}LI_0^2\ e^{-\frac{2}{\tau}t}$ ، أي $\dfrac{1}{2} = e^{-\frac{2}{\tau}t}$ ، وبادخال اللوغاريتم النبيري على طرفي المعادلة نجد :

$-ln2 = -\dfrac{2}{\tau}t$ ، وبالتالي : $t = t_{1/2} = \dfrac{\tau}{2}\ ln2$

التمرين 01

التفاعل حمض – أسـاس هو التفاعل الذي يتم فيه تبادل البروتونات H^+

تفاعل ترسيب : $Cu^{2+}_{(aq)} + 2\ OH^-_{(aq)} = Cu(OH)_{2\ (s)}$

$CH_3NH_{2(aq)} + CH_3COOH_{(aq)} = CH_3NH_3^+{}_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)}$: تفاعل حمض – أساس لأنه حدث تبادل بروتون H^+ بين حمض الإيثانويك والميثان أمين .

$CH_3COOH_{(l)} + CH_3OH_{(l)} = CH_3COO\text{-}CH_{3(l)} + H_2O_{(l)}$: تفاعل أسترة .

$HCl_{(g)} + NH_{3(g)} = NH_4Cl_{(s)}$ (نحصل في هذا التفاعل على كلور الأمونيوم صلب وليس محلولا لأن HCl و NH_3 غازان) : تفاعل حمض – أساس لأنه حدث تبادل بروتون H^+ بين غاز كلور الهيدروجين وغاز النشادر .

$C_6H_5COOH_{(l)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$: تفاعل حمض أساس لأنه حدث تبادل بروتون H^+ بين حمض البنزين والمـاء .

التمرين 02

1 – بتطبيق العلاقة $pH = -Log\left[H_3O^+\right]$ أو العلاقة العكسية لها $\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH}$ نملأ الجدول :

pH	**1,3**	3,4	**4,1**	6,8	**1,6**	9,6
$[H_3O^+]$ (mol/L)	$5,0 \times 10^{-2}$	**$4,0 \times 10^{-4}$**	$7,4 \times 10^{-5}$	**$1,6 \times 10^{-7}$**	$2,6 \times 10^{-2}$	**$2,5 \times 10^{-10}$**

2 – عندما يتناقص $[H_3O^+]$ يزداد الـ pH ، وذلك حسب التناسب العكسي بينهما في العلاقة $pH = -Log\left[H_3O^+\right]$.

نتحقق من ذلك مثلا في الخانتين الأولى والثانية في الجدول .

التمرين 03

1 – معادلة التفاعل : $HCl_{(g)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$

2 - $pH = -Log\left[H_3O^+\right]$ (1)

بما أن حمض كلور الهيدروجين يتشرد كليا في الماء ، فإن $[H_3O^+] = [HCl]$

كمية مادة غاز كلور الهيدروجين المنحلة في الماء هي : $n_{HCl} = \dfrac{V_g}{V_m} = \dfrac{0,1}{22400} = 4,46 \times 10^{-6}\ mol$

لدينا $[HCl] = \dfrac{n_{HCl}}{V_s} = \dfrac{4,46 \times 10^{-6}}{1} = 4,46 \times 10^{-6}\ mol/L$ ، حيث V_s هو حجم المحلول المائي (V_s = 1 L)

بالتعويض في العلاقة (1) : $pH = -Log\ 4,46 \times 10^{-6} = 5,35$

3 - بما أن الحمض قوي فإن $n_{HCl} = n_{H_3O^+}$ ، ولدينا $n_{H_3O^+} = \left[H_3O^+\right] \times V_s = 10^{-pH} \times V_s = 10^{-2} \times 1 = 10^{-2}\ mol$

وبالتالي كمية مادة غاز HCl المنحلة في 1 L من الماء هي 10^{-2} mol

التمرين 4

1 – معادلة التفاعل : $HNO_{3(l)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + NO_3^-_{(aq)}$

2 – اعتبرنا حمض الآزوت قويا ، أي أن $C = [H_3O^+] = 0,1\ mol/L$ ، ونعلم أن هذا المحلول الحمضي ليس ممدا إلى الدرجة التي يمكن فيها أن نطبق العلاقة $pH = -Log\left[H_3O^+\right]$.

حسب ما ذكرنا في الدرس أنه يجب أن يكون تركيز شوارد الهيدرونيوم في المحلول أقل من $10^{-2}\ mol/L$ (لا نحسب الـ pH)

3 – الحمض قوي ، إذن $n_{H_3O^+}$ لا يتغير عندما نمدد المحلول بالماء .

ليكن $[H_3O^+]_1$ هو التركيز المولي لشوارد الهيدرونيوم قبل التمديد و $[H_3O^+]_2$ هو التركيز المولي لشوارد الهيدرونيوم بعد التمديد .

$\left[H_3O^+\right]_1 V_1 = \left[H_3O^+\right]_2 V_2$ ، حيث $V_1 = 10\ mL$ ، $V_2 = 90 + 10 = 100\ mL$

نستنتج : $\left[H_3O^+\right]_2 = \dfrac{\left[H_3O^+\right]_1}{10} = \dfrac{0,1}{10} = 10^{-2}\ mol/L$

بتطبيق العلاقة $pH = -Log\left[H_3O^+\right]$ نجد $pH = 2$

ملاحظة : عندما نمدد بالماء محلولا حمضيا n مرة (في التمرين $n = 10$ ، أي أن الحجم كان 10 mL وأصبح 100 mL) فإن تركيزه المولي وبالتالي تركيز شوارد الهيدرونيوم يُقسَم على n . وإذا كان n من مضاعفات الـ 10 فإن pH المحلول يزداد بـ 1 ، 2 ، 3 ....

التمرين 5

1 – لكي نبين إن كان التفاعل تاما أو غير تـام ، نقارن بين التركيز المولي للحمض C والتركيز المولي لشوارد H_3O^+

إذا كان $[H_3O^+] = C$ فإن الحمض قوي .

إذا كان $[H_3O^+] < C$ فإن الحمض ضعيف .

- محلول حمض الإيثانويك : $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-3,9} = 1,26 \times 10^{-4}\ mol/L$

هذه القيمة أصغر من تركيز الحمض ، ومنه التفاعل غير تـام .

- محلول حمض كلور الهيدروجين : $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-3}\ mol/L$

هذه القيمة تساوي تركيز الحمض ، ومنه التفاعل تـام .

- كلور الأمونيوم هو ملح صيغته NH_4Cl . يتحلل في الماء إلى شوارد الأمونيوم NH_4^+ وشوارد الكلور Cl^-

القوة التي نتكلم عنها هنا هي قوة تفاعل شاردة الأمونيوم NH_4^+ مع المـاء .

لو لم تتفاعل هاتان الشاردتان مع الماء لوجدنا pH المحلول مساويا للقيمة 7 . سبب نزول الـ pH إلى القيمة 6,2 هو تفاعل الحمض الضعيف NH_4^+ مع المـاء : $NH_4^+{}_{(aq)} + H_2O_{(aq)} = NH_{3(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

$[H_3O^+] = 10^{-6,2} = 6,3 \times 10^{-7}\ mol/L$. وبمقارنة $[H_3O^+]$ مع NH_4Cl نحكم على أن التفاعل غير تـام .

- محلول حمض الآزوت : $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-3}\ mol/L$. هذه القيمة تساوي تركيز الحمض ، ومنه التفاعل تـام .

2 – التفاعل تـام معناه الحمض قوي ، وبالتالي : حمض الإيثانويك ضعيف ، شاردة الأمونيوم حمض ضعيف ، حمض الآزوت قوي .

التمرين 06

1 - $HCl_{(g)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$

الثنائيتان هما : $HCl\ /\ Cl^-$ ، H_3O^+ / H_2O

الثنائية HCl / Cl^- هي ثنائية شكلية ، حيث في الماء لا يوجد إلا الحمض الوحيد H_3O^+

2 - $pH = -Log\ C = -Log\ 10^{-3} = 3$

3 - أ) $(H_3O^+ , Cl^-) + (Na^+ , OH^-) \rightarrow (Na^+ , Cl^-) + 2\ H_2O$

أو اختصـارا : $H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightarrow 2\ H_2O_{(l)}$ (1)

ب) $pH = -\ Log\ [H_3O^+]$ (2)

نحسب عدد مولات OH^- التي أضفناها :

$$n(OH^-) = C_b\ V_b = 10^{-3} \times 50 \times 10^{-3} = 0,5 \times 10^{-4}\ mol$$

نحسب عدد مولات H_3O^+ الموجودة في محلول حمض كلور الهيدروجين :

$$n(H_3O^+) = C_a\ V_a = 10^{-3} \times 0,1 = 10^{-4}\ mol$$

حسب التفاعل (1) ، فإن مولا واحدا من H_3O^+ يتفاعل مع مول واحد من OH^- . إذن عدد مولات شوارد H_3O^+ الباقية بعد التفاعل هي :

$$n'(H_3O^+) = 10^{-4} - 0,5 \times 10^{-4} = 0,5 \times 10^{-4}\ mol$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

$$\left[H_3O^+\right] = \frac{n'\left(H_3O^+\right)}{V_a + V_b} = \frac{0,5 \times 10^{-4}}{0,15} = 3,3 \times 10^{-4}\ mol/L$$

بالتعويض في العلاقة (2) : $pH = -\ Log\ 3,3 \times 10^{-4} = 3,5$

التمرين 07

1 – معـادلة التفاعل : $C_6H_5\text{–}COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5\text{–}COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2 – حتى نتأكد أن التفاعل غير تــام نحسب التركيز المولي لشوارد الأكسونيوم $[H_3O^+]$ ونقارنها مع التركيز C .

لدينا $\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-2,95} = 1,12 \times 10^{-3}\ mol/L$ ، ولدينا $C = 2,0 \times 10^{-2}\ mol/L$.

بما أن التركيز المولي لشوارد الهيدرونيوم أقل من التركيز المولي C ، فإن تفاعل حمض البنزين مع الماء غير تــام .

3 – المقارنة بين pH و $-\ Log\ C$:

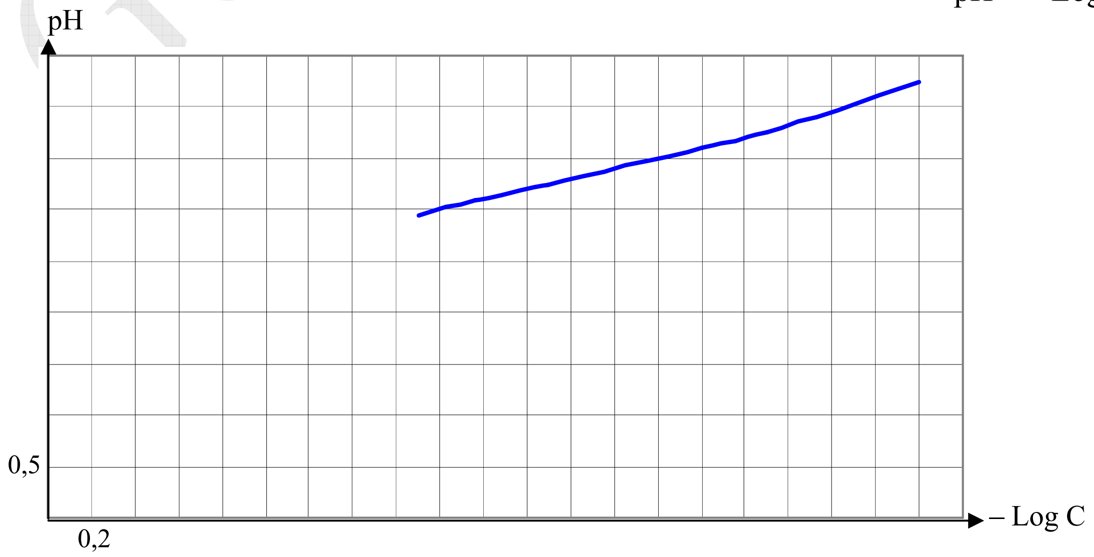
pH	2,95	3,1	3,25	3,6	3,75	4,25	4,5	5,1
–Log C	1,70	1,96	2,3	3,00	3,30	4,00	4,30	5,00

التعليل :

نلاحظ أن في كل محلول يكون $pH > -\ Log\ C$ ، ونعلم أن $pH = -\ Log\ [H_3O^+]$ ، وبالتالي :

$-\ Log\ [H_3O^+] > -\ Log\ C$ ، ومنه $Log\ [H_3O^+] < Log\ C$ ، وهذا يؤدي لنتيجة ضعف الحمض $[H_3O^+] < C$.

4 – البيــان $pH = -\ Log\ C$



التمرين 8

1 - $CH_2ClCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_2ClCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2 – جدول التقدم :

	$CH_2ClCOOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$CH_2ClCOO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	CV	زيـادة	0	0
الحالة الانتقالية	$CV - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$CV - x_f$	زيادة	x_f	x_f

لتعيين التقدم النهائي نضع $CV - x_{max} = 0$ لأن الحمض هو المتفاعل المحد ، ومنه :

$$x_{max} = CV = 10^{-2} \times 20 \times 10^{-3} = 2,0 \times 10^{-4}\ mol$$

3 - **تصحيح** : $pH = 2,4$ (ليس $pH = 2,37$) .لا نبقي على الرقم الثاني بعد الفاصلة في قيمة الـ pH إلا إذا كان عبارة عن **5**

التقدّم النهـائي هو كمية مـادة H_3O^+ في نهاية التفاعل ، أي :

$$x_f = n(H_3O^+) = [H_3O^+] \times V = 10^{-pH} \times V = 10^{-2,4} \times 20 \times 10^{-3} = 7,9 \times 10^{-5}\ mol$$

نسبة التقدم النهائي : $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \dfrac{7,9\times10^{-5}}{2\times10^{-4}} = 0,39$ ، ومنه التحول الكيميائي غير تــام .

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 09

1 – في 100 g من المحلول (S_0) يوجد 28 g من الحمض النقي .

$$n(HI) = \frac{m}{M} = \frac{28}{128} = 0,22 mol$$ (128 g/mol هي الكتلة المولية ليود الهيدروجين HI)

100 g من (S_0) تكافئ حجما V ، حيث $\rho = \dfrac{m'}{V}$ (1)

ولدينا $d = \dfrac{\rho}{\rho_e}$ ، $\rho_e = 1\ g/cm^3$ ، وهي الكتلة الحجمية للمـاء ، ومنه $\rho = d \times \rho_e = 1,26 \times 1 = 1,26\ g/cm^3$

بالتعويض في (1) : $V = \dfrac{m'}{\rho} = \dfrac{100}{1,26} = 79,4\ cm^3 = 7,94\times10^{-2} L$

التركيز المولي لـ S_0 هو [HI] ، حيث : $[HI] = \dfrac{n(HI)}{V} = \dfrac{0,22}{7,94\times10^{-2}} = 2,77 mol/L$

2 – عند التمديد لا يتغير عدد مولات HI ، أي : $n_0(HI) = n(HI)$ ، حيث :

$n_0(HI) = C_0V_0$: عدد المولات قبل التمديد ، $n(HI) = CV$: عدد المولات بعد التمديد .

$C_0V_0 = CV$ ، ومنه : $V_0 = \dfrac{CV}{C_0} = \dfrac{0,05\times0,5}{2,77} \approx 9\times10^{-3} L = 9mL$

الطريقة هي :

نأخذ حجما $V = 9\ mL$ من المحلول S_0 ونضيف له المـاء المقطر إلى أن يصبح حجم المحلول $500\ mL$ ، أي نضيف $491\ mL$ من المـاء المقطر ونرجّ فنحصل على المحلول S_1 .

3 - أ) تركيز المحلول S_2 : لدينا $n_1(HI) = n_2(HI)$ ، أي : $C_1V_1 = C_2V_2$ ، ومنه :

$$C_2 = \frac{0{,}05 \times 5}{200} = 1{,}25 \times 10^{-3}\ mol/L$$

ب) **تعديل** : pH المحلول S_2 يساوي 2,9 . احسب نسبة التقدم النهـائي للتفاعل بين الحمض والمـاء . هل يمكن اعتبار التفاعل تـامّا ؟

الجواب : لدينا نسبة التقدم النهائي $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[H_3O^+] \times V_2}{C_2V_2} = \frac{[H_3O^+]}{C_2}$ (2)

نكتب معادلة التفاعل وننشئ جدول التقدّم لكي نبيّن أن $x_f = n(H_3O^+)$ ، ولدينا $x_{max} = C_2V_2$

	$HF_{(aq)}$	+ $H_2O_{(l)}$	= $H_3O^+_{(aq)}$	+ $F^-_{(aq)}$
$t = 0$	C_2V_2	زيادة	0	0
نهاية التفاعل	$C_2V_2 - x_f$	زيادة	x_f	x_f

بالتعويض في العلاقة (2) ، $\tau = \frac{10^{-pH}}{C_2} = \frac{10^{-2{,}9}}{1{,}25 \times 10^{-3}} = 1$ ، وبالتالي التفاعل تـام .

للمزيد : ذرات الهالوجينات (العمود السابع في التصنيف الدوري المختصر) تكوّن مع ذرات الهيدروجين حموضا صيغتها من الشكل HA (HI ، HBr ، HCl ، HF) . إن هذه الحموض ليست كلها قوية ، بل تتناقص قوّتها من HF إلى HI ، أي أن كلما كان حجم ذرة الهالوجين كبيرا كلما كان الحمض أقوى . أقوى هذه الحموض هو الذي نتحدّث عنه في التمرين 9 ، أي أن من المستحيل تفاعل شاردة اليود I^- مع المـاء ، فهي أساس ضعيف جدا جدا .. وهذا ما يوضّح تعديلنا للسؤال الفرعي ب) من السؤال 3 .

التمرين 10

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

1 – $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2 – النسبة النهائية للتقدم هي $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$ (1)

(يجب إعطاء قيمتي الناقليتين المولية الشارديتين للشاردتين H_3O^+ و CH_3COO^- في نص التمرين)

$\lambda_1 = \lambda_{H_3O^+} = 35 \times 10^{-3}\ S\ m^2\ mol^{-1}$ ، $\lambda_1 = \lambda_{CH_3COO^-} = 4{,}1 \times 10^{-3}\ S\ m^2\ mol^{-1}$

لدينا $\sigma_1 = \lambda_1[H_3O^+] + \lambda_2[CH_3COO^-] + \lambda_{OH^-}[OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ في المحلول يكون لدينا :

$[H_3O^+] = [CH_3COO^-]$ ، وبالتالي نكتب : $\sigma_1 = [H_3O^+](\lambda_1 + \lambda_2)$ (2)

$CH_3COOH_{(aq)}$	+ $H_2O_{(l)}$	= $CH_3COO^-_{(aq)}$	+ $H_3O^+_{(aq)}$
CV	زيادة	0	0
$CV - x_f$	زيـادة	x_f	x_f

من جدول التقدم نستنتج أن $x_f = n(H_3O^+)$ و $x_{max} = CV$. نحسب من العلاقة (1) التركيز المولي $[H_3O^+]$

$$[H_3O^+] = \frac{\sigma_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{4{,}9 \times 10^{-3}}{39{,}1 \times 10^{-3}} = 0{,}125\ mol/m^3 = 1{,}25 \times 10^{-4}\ mol/L$$

من العلاقة (1) $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n(H_3O^+)}{CV} = \frac{[H_3O^+] \times V}{CV} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{1,25 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,125$

3 - أ) المطلوب هو $[CH_3COOH]$ وليس $[CH_3COO^-]$. (لا يمكن معرفة $[CH_3COO^-]$ إلا بمعرفة pH أو σ)

التمديد يؤدي إلى : $C_2V_2 = C_1V_1$ ، حيث C_1V_1 هو عدد مولات الحمض قبل التمديد ، C_2V_2 عدد المولات بعد التمديد .

مع العلم أن $C_2 = [CH_3COOH]$

$$C_2 = \frac{C_1V_1}{V_2} = \frac{10^{-3} \times 10}{100} = 10^{-4} mol/L$$

ب) $\sigma_2 = \lambda_1 [H_3O^+] + \lambda_2 [CH_3COO^-] = [CH_3COO^-](\lambda_1 + \lambda_2)$ ، لأن $[H_3O^+] = [CH_3COO^-]$

تصحيح : القيمة الصحيحة لـ σ_2 هي $1,55 \ mS.m^{-1}$ (ليس $1,2 \ mS.m^{-1}$ ، لأن هذه القيمة لا توافق التركيز المولي بعد التمديد)

ومنه : $[CH_3COO^-] = \frac{\sigma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1,55 \times 10^{-3}}{39,1 \times 10^{-3}} = 0,038 \ mol/m^3 = 3,8 \times 10^{-5} mol/L$

جـ) النسبة النهائية للتقدم : $\tau_2 = \frac{[H_3O^+]}{C_2} = \frac{3,8 \times 10^{-5}}{10^{-4}} = 0,38$

4 - كلما مددنا حمضا ضعيفا ازدادت نسبة التقدم النهائي ، أي $\tau_2 > \tau_1$

التمرين 11

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

1 - $AgCl_{(s)} = Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$

2 -

$AgCl_{(s)}$	=	$Ag^+_{(aq)}$	+	$Cl^-_{(aq)}$
n_0		0		0
$n_0 - x_f$		x_f		x_f

3 - $\sigma = \lambda_{Ag^+}[Ag^+] + \lambda_{Cl^-}[Cl^-]$ ، تركيزا شواردتي الهيدرونيوم والهيدروكسيد مهملان في هذا المحلول الملحي .

$\sigma = [Ag^+](\lambda_{Ag^+} + \lambda_{Cl^-})$ ، لأن $[Ag^+] = [Cl^-]$ ، ومنه :

$$[Ag^+] = \frac{\sigma}{(\lambda_{Ag^+} + \lambda_{Cl^-})} = \frac{0,19 \times 10^{-3}}{(6,2 + 7,6) \times 10^{-3}} = 0,013 \ mol/m^3 = 1,3 \times 10^{-5} mol/L$$

$$[Ag^+] = [Cl^-] = 1,3 \times 10^{-5} mol/L$$

لا يمكن أن أقول أي شيء عن انحلال كلور الفضة في الماء ما دمت لا أعرف كمية المادة المنحلة .

التمرين 12

1 – $NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} = NH_4^+{}_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$

2 – لكي نبيّن أن غـاز النشادر لا يتفاعل كليا مع المـاء نقارن تركيز شوارد الهيدروكسيد OH^- مع تركيز الأساس C_1 .

لدينا $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{10^{-11,1}} = 1,26 \times 10^{-3} mol/L$ ، ومنه $[OH^-] < C_1$ ، وبالتالي التفاعل غير تـام .

يمكن أن نبيّن أن التفاعل غير تام بحساب قيمة نسبة التقدم النهائية τ_1

من أجل هذا ننشئ جدول التقدم :

$NH_{3(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$NH_4^+{}_{(aq)}$ +	$OH^-{}_{(aq)}$
C_1V_1	زيادة	0	0
$C_1V_1 - x_f$	زيادة	x_f	x_f

$$\tau_1 = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n(OH^-)}{x_{max}} = \frac{[OH^-]\times V_1}{C_1V_1} = \frac{[OH^-]}{C_1} = \frac{1,26\times10^{-3}}{0,1} = 1,26\times10^{-2}$$

$\tau_1 < 1$ ، إذن التفاعل غير تام

3 – عدد مولات NH_3 لا يتغير بعد التمديد ، أي أن $C_1V_1 = C_2V_2$ ، حيث أن V_1 هو الحجم الذي نأخذه من المحلول الأول .

$$V_1 = \frac{C_2V_2}{C_1} = \frac{2,5\times10^{-2}\times100}{0,1} = 25\ mL$$

الطريقة هي : نأخذ حجما $V_1 = 25$ mL ونضعه في مخبار حجمه 100 mL ، ثم نكمل الحجم بالماء المقطر ، فنحصل بذلك على محلول S_2 حجمه 100 mL وتركيزه المولي $C_2 = 2,5 \times 10^{-2}$ mol/ L .

4 –

$NH_{3(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$NH_4^+{}_{(aq)}$ +	$OH^-{}_{(aq)}$ H
C_2V_2	زيادة	0	0
$C_2V_2 - x_f$	زيادة	x_f	x_f

النسبة النهائية لتقدّم التفاعل هي $\tau_2 = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n(OH^-)}{C_2V} = \frac{[OH^-]\times V}{C_2V} = \frac{[OH^-]}{C_2}$

لدينا $[OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-pH}} = \frac{10^{-14}}{10^{-10,8}} = 6,31\times10^{-4} mol/L$ ، وبالتالي $\tau_2 = \frac{6,31\times10^{-4}}{2,5\times10^{-2}} = 2,52\times10^{-2}$

وجدنا $\tau_1 < \tau_2$ ، ومنه نستخلص أنه كلما كان الأساس الضعيف ممدا يتشرد أكثر .

التمرين 13

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

تصحيح : ثابت الخلية $K = 1$ cm (ليس $100\ m^{-1}$)

$G_1 = 4,88 \times 10^{-4}$ S (ليس $\sigma_1 = 4,88 \times 10^{-5}\ S.m^{-1}$)

$G_2 = 32,5 \times 10^{-4}$ S (ليس $\sigma_2 = 2,19 \times 10^{-4}\ S.m^{-1}$)

يعطى $\lambda_{H_3O^+} = 35,9\times10^{-3} S.m^2mol^{-1}$ ، $\lambda_{F^-} = 5,5\times10^{-3} S.m^2mol^{-1}$ ، $\lambda_{CH_3COO^-} = 4,1\times10^{-3} S.m^2mol^{-1}$

1 – معادلة تفاعل حمض الإيثانويك مع الماء : $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}$

معادلة تفاعل فلور الهيدروجين مع الماء : $HF_{(aq)} + H_2O_{(aq)} = F^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}$

2 – أ) جدول التقدم للحمض HA (حمض الإيثانويك أو حمض الفلور)

	$HA_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$A^-{}_{(l)}$ +	$H_3O^+{}_{(l)}$
$t = 0$	CV	زيـادة	0	0
الحالة الانتقالية	$CV - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$CV - x_f$	زيادة	x_f	x_f

ب) حجما المحلولين لم يُعطيا في التمرين ، لهذا نعتبر حجم كل محلول هو 1 L

التقدم الأعظمي في كل تحول هو $x_{max} = CV = 0,1 \times 1 = 0,1$ mol

جـ) التقدم النهائي في حالة حمض الإيثانويك :

لدينا $\sigma_1 = \lambda_1 [H_3O^+] + \lambda_2 [CH_3COO^-] + \lambda_{OH^-} [OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ في المحلول يكون لدينا :

$[H_3O^+] = [CH_3COO^-]$ ، وبالتالي نكتب : $\sigma_1 = [H_3O^+](\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-})$ (1)

نحسب قيمتي σ_1 و σ_2 من العلاقة $G = K\sigma$.

$$\sigma_1 = \frac{G_1}{K} = \frac{4,88\times10^{-4}}{0,01} = 4,88\times10^{-2}\ S.m^{-1} \quad ، \quad \sigma_2 = \frac{G_2}{K} = \frac{32,5\times10^{-4}}{0,01} = 32,5\times10^{-2}\ S.m^{-1}$$

لدينا من جدول التقدم $x_f = n(H_3O^+) = [H_3O^+] \times V$.

باستعمال العلاقة (1) نجد : $x_{f_1} = \dfrac{\sigma_1 \times V}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-}} = \dfrac{4,88\times10^{-2}\times10^{-3}}{(35,9+4,1)\times10^{-3}} = 1,22\times10^{-3}$

التقدم النهائي في حالة حمض فلور الهيدروجين :

$$x_{f_2} = \frac{\sigma_2 \times V}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{F^-}} = \frac{32,5\times10^{-2}\times10^{-3}}{(35,9+5,5)\times10^{-3}} = 7,8\times10^{-3}$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 14

1 - معادلتا التفاعلين :

$CH_2ClCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_2ClCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ (1)

$CHCl_2COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CHCl_2COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ (2)

تصحيح : $\sigma_1 = 0,121\ S\ m^{-1}$ (ليس $\sigma_1 = 0,167\ mS\ m^{-1}$) ، $\sigma_2 = 0,33\ S\ m^{-1}$ (ليس $\sigma_2 = 0,33\ mS\ m^{-1}$)

ثنائي كلور الإيثانويك هو $CHCl_2COOH$

2 – بالنسبة للحمض $CH_2ClCOOH$:

$\sigma_1 = \lambda_{H_3O^+} [H_3O^+] + \lambda_{CH_2ClCOO^-} [CH_2ClCOO^-] + \lambda_{OH^-} [OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ يكون لدينا :

$[CH_2ClCOO^-] = [H_3O^+]$ ، وبالتالي : $\sigma_1 = [H_3O^+](\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_2ClCOO^-})$

$$[H_3O^+] = \frac{\sigma_1}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_2ClCOO^-}} = \frac{0,121}{39,22\times10^{-3}} = 3,08\ mol/m^3 = 3,08\times10^{-3}\ mol/L$$

بالنسبة للحمض $CHCl_2COOH$:

$\sigma_2 = \lambda_{H_3O^+} [H_3O^+] + \lambda_{CHCl_2COO^-} [CHCl_2COO^-] + \lambda_{OH^-} [OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ يكون لدينا :

$[CHCl_2COO^-] = [H_3O^+]$ ، وبالتالي : $\sigma_2 = [H_3O^+](\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CHCl_2COO^-})$

$$[H_3O^+] = \frac{\sigma_2}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CHCl_2COO^-}} = \frac{0,33}{38,83\times10^{-3}} = 4,5\ mol/m^3 = 4,5\times10^{-3}\ mol/L$$

3 – النسبة النهـائية لتقدّم تفـاعل $CH_2ClCOOH$:

$$\tau_1 = \frac{[H_3O^+]}{[CH_2ClCOOH]} = \frac{3{,}08\times10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}31$$

النسبة النهـائية لتقدّم تفـاعل $CHCl_2COOH$:

$$\tau_2 = \frac{[H_3O^+]}{[CHCl_2COOH]} = \frac{8{,}5\times10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}85$$

4 – التفـاعل (1) :

$$K_1 = \frac{[H_3O^+]_f \times [CH_2ClCOO^-]_f}{[CH_2ClCOOH]_f}$$

التفـاعل (2) :

$$K_2 = \frac{[H_3O^+]_f \times [CHCl_2COO^-]_f}{[CHCl_2COOH]_f}$$

عند التوازن يكون تركيز الحمض الباقي ، أي $[CH_2ClCOOH]$ أو $[CHCl_2COOH]$ ، مساويا للتركيز الابتدائي مطروح منه تركيز شوارد الهيدرونيوم $[H_3O^+]$ ، وبالتالي :

$$K_1 = \frac{[H_3O^+]_f^{\,2}}{C-[H_3O^+]_f} = \frac{(3{,}08\times10^{-3})^2}{10^{-2}-3{,}08\times10^{-3}} = 1{,}4\times10^{-3}$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

$$K_2 = \frac{[H_3O^+]_f^{\,2}}{C-[H_3O^+]_f} = \frac{(8{,}5\times10^{-3})^2}{10^{-2}-8{,}5\times10^{-3}} = 4{,}8\times10^{-2}$$

5 – إذا كان للحمضين نفس التركيز المولي ، فإن نسبة التقدّم النهائي لتفاعل الحمضين مع الماء تكون متناسبة طرديا مع ثابت التوازن ، أي أن الحمض الذي له ثابت توازن أكبر هو الذي تكون له نسبة التقدم النهائي الأكبر .

المقارنة غير صحيحة إذا لم يكن للحمضين نفس التركيز المولي ، لأن التمديد يزيد في قيمة τ .

ملاحظة

في حـالة تفاعل حمض ضعيف مع الماء ، فإن ثابت التوازن K هو نفسه ثابت الحموضة K_A للثنائية الخاصة بهذا الحمض ، لهذا اعتمدنا في تصحيح قيمتي σ على أساس ثابتي الحموضة للثنائيتين :

$CH_2ClCOOH / CH_2ClCOO^-$ و $CHCl_2COOH / CHCl_2COO^-$

التمرين 15

1 – المعادلة : $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

كسر التفـاعل :

$$Q_r = \frac{[H_3O^+]\times[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$$

2 - $\sigma = \lambda_{H_3O^+}[H_3O^+] + \lambda_{CH_3COO^-}[CH_3COO^-] + \lambda_{OH^-}[OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ نكتب :

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+}[H_3O^+] + \lambda_{CH_3COO^-}[CH_3COO^-]$$

3 – جدول التقدم

	$CH_3COOH_{(aq)}$	+ $H_2O_{(l)}$	= $CH_3COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	CV	زيـادة	0	0

الحالة الانتقالية	$CV - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$CV - x_{éq}$	زيادة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

4 – عبارة σ : نعلم أن $[CH_3COO^-] = [H_3O^+]$ ، وبالتالي $\sigma = [H_3O^+](\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-})$ (1)

من جدول التقدم نستنتج أن عند نهاية التفاعل يكون $x_{éq} = n(H_3O^+)$ ، وباتالي تصبح عبارة σ كالتالي :

$$\sigma = \frac{x_f}{V}(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-})$$

من العلاقة (1) نحسب التركيز المولي لشوارد الهيدرونيوم .

$$[H_3O^+] = [CH_3COO^-] = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-}} = \frac{1,6 \times 10^{-2}}{(35,9 + 4,1) \times 10^{-3}} = 0,4\ mol/m^3 = 0,4 \times 10^{-3} mol/L$$

5 – عند حالة التوازن يكون $[CH_3COOH] = C - [H_3O^+] = 10^{-2} - 4 \times 10^{-4} = 9,6 \times 10^{-3}$ mol/L

ثابت التوازن $K = \frac{[H_3O^+]_f \times [CH_3COO^-]_f}{[CH_3COOH]_f} = \frac{(4 \times 10^{-4})^2}{9,6 \times 10^{-3}} = 1,67 \times 10^{-5}$

التمرين 16

1 - $NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} = NH_4^+{}_{(aq)} + OH^-{}_{(aq)}$

$\lambda_{OH^-} = 20 \times 10^{-3} S.m^2 mol^{-1}$ ، $\lambda_{NH_4^+} = 7,35 \times 10^{-3} S.m^2 mol^{-1}$

2 - **تصحيح** :

قيم الناقلية النوعية المسجّلة في الجدول خاطئة .

محلول النشادر الذي تركيزه $C = 10^{-2}$ mol/ L تكون ناقليته النوعية $\sigma = 10,9$ $mS.m^{-1}$ وليس $100,4\ \mu S.m^{-1}$.

لماذا القيم المسجلة في الجدول خاطئة ؟

يجب أن نعلم أن ناقلية محلول (G) تخص فقط جزءا من المحلول ، أي الجزء المحصور بين صفيحتي الخلية : $G = K\sigma$

حيث K هو ثابت الخلية . أما الناقلية النوعية لمحلول (σ) تخص المحلول ، أي أنها تتعلق بطبيعة الشوارد الموجودة في المحلول وتراكيزها المولية في هذا المحلول ودرجة حرارة المحلول .

المقصود من هذا هو : **أن محلولا شارديا معينا بتركيز معين في درجة حرارة معينة لا تكون له إلا قيمة واحدة للناقلية النوعية** .

الجدول بعد التصحيح :

C (mol/L)	$1,0 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-3}$
σ $mS.m^{-1}$	10,9	7,71	3,44

للمزيد : صحّحنا قيم الناقلية النوعية بالطريقة التالية : هناك علاقة تجمع بين التركيز المولي للأساس الضعيف والـ pH ،

(لستَ مطالبا بها) $pH = \frac{1}{2}(14 + pK_A + Log\ C)$ ، حيث C هوالتركيز المولي للأساس الضعيف (الممدد) ، pK_A هي القيمة الخاصة بالثنائية أساس/ حمض (في مثالنا الثنائية هي NH_4^+ / NH_3 و $pK_A = 9,2$ في الدرجة 25°C) .

نعوّض فنجد $pH = 10,6$ ، ثم نستنتج التركيز المولي لشوارد الهيدروكسيد في المحلول :

$$\left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{10^{-pH}} = \frac{10^{-14}}{10^{-10,6}} = 4,0 \times 10^{-4} mol/L$$

من جهة أخرى لدينا : $\sigma = \left[OH^-\right]\left(\lambda_{OH^-} + \lambda_{NH_4^+}\right) = 4 \times 10^{-4} \times 10^3 (20 + 7,35) \times 10^{-3} = 10,9 \times 10^{-3} S$

وبهذه الطريقة حسبنا كل القيم الأخرى للناقلية النوعية . وهناك الطريقة الأخرى التي تعتمد على قيمة pK_A الثنائية NH_4^+ / NH_3 .

$NH_{3(aq)}$	+	$H_2O_{(l)}$	=	$NH_4^+{}_{(aq)}$	+	$OH^-{}_{(aq)}$
CV		زيادة		0		0
$CV - x_f$		زيادة		x_f		x_f

من جدول التقدم نستنتج أن $x_f = n\,(OH^-)$ ، ولدينا $[OH^-] = [NH_4^+]$ لأن $[H_3O^+]$ مهمل .

لتعيين تركيزي الشاردتين OH^- و NH_4^+ نكتب عبارة الناقلية النوعية للمحلول :

$$\sigma = \lambda_{OH^-}\left[OH^-\right] + \lambda_{NH_4^+}\left[NH_4^+\right] + \lambda_{H_3O^+}\left[H_3O^+\right] = \lambda_{OH^-}\left[OH^-\right] + \lambda_{NH_4^+}\left[NH_4^+\right]$$

$$\sigma = \left[OH^-\right]\left(\lambda_{OH^-} + \lambda_{NH_4^+}\right)$$

المحلول الأول :

$$\left[OH^-\right] = \left[NH_4^+\right] = \frac{\sigma_1}{\lambda_{OH^-} + \lambda_{NH_4^+}} = \frac{10,9 \times 10^{-3}}{27,35 \times 10^{-3}} = 0,4\ mol/m^3 = 4,0 \times 10^{-4} mol/L$$

أما التركيز المولي للشاردة H_3O^+ نحسبه من الجداء الشاردي للماء $[H_3O^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$

$$\left[H_3O^+\right] = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-4}} = 2,5 \times 10^{-11} mol/L$$ ، وهذا يؤكّد سبب إهماله .

المحلول الثاني :

$$\left[OH^-\right] = \left[NH_4^+\right] = \frac{\sigma_2}{\lambda_{OH^-} + \lambda_{NH_4^+}} = \frac{7,71 \times 10^{-3}}{27,35 \times 10^{-3}} = 0,28\ mol/m^3 = 2,8 \times 10^{-4} mol/L$$

$$\left[H_3O^+\right] = \frac{10^{-14}}{2,8 \times 10^{-4}} = 3,6 \times 10^{-11} mol/L$$

المحلول الثالث :

$$\left[OH^-\right] = \left[NH_4^+\right] = \frac{\sigma_3}{\lambda_{OH^-} + \lambda_{NH_4^+}} = \frac{3,44 \times 10^{-3}}{27,35 \times 10^{-3}} = 0,125\ mol/m^3 = 1,25 \times 10^{-4} mol/L$$

$$\left[H_3O^+\right] = \frac{10^{-14}}{1,25 \times 10^{-4}} = 8,0 \times 10^{-11} mol/L$$

النسبة النهائية للتقدم في كل محلول :

لدينا $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \dfrac{\left[OH^-\right]}{C}$

المحلول الأول : $\tau_1 = \dfrac{4\times10^{-4}}{10^{-2}} = 0{,}04$.

المحلول الثاني : $\tau_2 = \dfrac{2{,}8\times10^{-4}}{5\times10^{-3}} = 0{,}056$

المحلول الثالث : $\tau_3 = \dfrac{1{,}25\times10^{-4}}{10^{-3}} = 0{,}125$

التمرين 17

معادلة التفاعل : $2\,(Ag^+ , NO_3^-) + Cu = (Cu^{2+} , 2\,NO_3^-) + 2\,Ag$

أو اختصارا : $2\,Ag^+ + Cu = Cu^{2+} + 2\,Ag$ (NO_3^- شاردة غير فعالة)

للمزيد : ذرة النحاس بإمكانها تقديم الإلكترونات لشوارد الفضة حسب الكمون النظامي المعطى في جدول الكمونات النظامية في الوحدة الأولى .

1 - كسر التفاعل : $Q_r = \dfrac{[Cu^{2+}]}{[Ag^+]^2}$ ، تركيزا Cu و Ag لا يظهران في عبارة Q_r لأنهما صلبان .

2 - كمية مادة النحاس $n(Cu) = \dfrac{m}{M} = \dfrac{6{,}35}{63{,}5} = 0{,}1\ mol$

جدول التقدّم :

$2\,Ag^+$	+	Cu	=	Cu^{2+}	+	$2\,Ag$
CV		n_0		0		0
$CV - 2\,x_{éq}$		$n_0 - x_{éq}$		$x_{éq}$		x_q

3 - ثابت التوازن $K = Q_{r,f} = \dfrac{[Cu^{2+}]_f}{[Ag^+]_f^{\,2}}$ (1)

ولدينا من جدول التقدم $n\,(Cu^{2+}) = x_{éq}$ ، وبالتالي : $[Cu^{2+}] = \dfrac{x_{éq}}{V}$

ولدينا كذلك من جدول التقدم $n(Ag^+) = CV - 2x_{éq}$ ، وبالتالي $[Ag^+] = \dfrac{CV - 2x_{éq}}{V}$

وبالتعويض في العلاقة (1) : $K = \dfrac{\dfrac{x_{éq}}{V}}{\left(\dfrac{CV - 2x_{éq}}{V}\right)^2} = \dfrac{x_{éq}\ V}{(CV - 2x_{éq})^2}$ (2)

4 - لكي نتأكد من ذلك نعوّض $x_{éq} = 1{,}0 \times 10^{-3} - 4{,}8 \times 10^{-11}$ mol في المعادلة (2) ، وذلك لكي نجد النتيجة

. $K = 2{,}2 \times 10^{15}$ ($K = 2{,}2 \times 10^{15}$) (ليس $K = 2{,}2\ g.\ mol^{15}$)

$$K = \frac{x_{éq}\ V}{(CV - 2x_{éq})^2} = \frac{(10^{-3} - 4{,}8\times10^{-11})\times 0{,}02}{[0{,}1\times0{,}02 - 2(10^{-3} - 4{,}8\times10^{-11})]^2} = \frac{2\times10^{-5} - 9{,}6\times10^{-13}}{(9{,}6\times10^{-11})^2}$$

نهمل في البسط القيمة $9,6 \times 10^{-13}$ أمـام القيمة 2×10^{-5} ، فنجد $K = 2,17 \times 10^{15}$.

5 - عند التوازن يكون $n(Ag^+) = CV - 2x_{éq} = 9,6 \times 10^{-11}$ mol (انظر لمقام عبارة K) ، وبالتالي :

$$\left[Ag^+\right] = \frac{CV - 2x_{éq}}{V} = \frac{9,6 \times 10^{-11}}{0,02} = 4,8 \times 10^{-9}\ mol/L$$

لكي نحسب x_{max} يجب تحديد المتفاعل المحد أولا ، من أجل ذلك نكتب :

$n_0 - x = 0$ ، ونستنتج $x = 0,1$ mol

$CV - 2x = 0$ ونستنتج $x = \frac{CV}{2} = \frac{0,1 \times 0,02}{2} = 1,0 \times 10^{-3} mol$

القيمة الصغيرة للتقدم x هي الموافقة لشوارد الفضة ، وبالتالي شوارد الفضة هي المتفاعل المحد ، ومنه يكون $x_{max} = 10^{-3}$ mol

نسبة التقدم النهـائي للتفاعل هي $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-3} - 4,8 \times 10^{-11}}{10^{-3}} \approx 1$ ، يمكن اعتبار التفاعل شبه تـام .

التمرين 18

1 - معادلة التفاعل : $(2Na^+, SO_3^{2-})_{(aq)} + CH_3COOH_{(aq)} = CH_3COO^-_{(aq)} + (Na^+, HSO_3^-)_{(aq)}$

أو اختصارا : $SO_3^{2-}{}_{(aq)} + CH_3COOH_{(aq)} = CH_3COO^-_{(aq)} + HSO_3^-$

2 -

	$SO_3^{2-}{}_{(aq)}$ +	$CH_3COOH_{(aq)}$ =	$HSO_3^-{}_{(aq)}$ +	$CH_3COO^-_{(aq)}$
$t = 0$	C_1V_1	C_2V_2	0	0
الحالة الانتقالية	$C_1V_1 - x$	$C_2V_2 - x$	x	x
الحالة النهائية	$C_1V_1 - x_f$	$C_2V_2 - x_f$	x_f	x_f

3 -

$$Q_{r,i} = \frac{[CH_3COO^-][HSO_3^-]}{[SO_3^{2-}][CH_3COOH]} = \frac{0 \times 0}{C_1 \times C_2} = 0$$

4 -

$$Q_{r,f} = \frac{[CH_3COO^-]_f [HSO_3^-]_f}{[SO_3^{2-}]_f [CH_3COOH]_f} = \frac{x_f^2}{(C_1V_1 - x_f) \times (C_2V_2 - x_f)} \quad (1)$$

لدينا النسبة النهائية للتقدم $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$ ، ومن المعطيات لدينا عدد مولات المتفاعلين متساويان (نفس التركيز ونفس الحجم)

إذن $x_{max} = C_1V_1 = C_2V_2$ ، وبالتعويض في العلاقة (1) نكتب :

$$Q_{r,f} = \frac{x_f^2}{(x_{max} - x_f)^2} = \left(\frac{x_f}{x_{max} - x_f}\right)^2 = \left(\frac{x_f}{x_f\left(\frac{x_{max}}{x_f} - 1\right)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{\tau} - 1}\right)^2$$

$$Q_{r,f} = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

5 - نعلم أن $Q_{r,f} = K$ ، ومنه $K = \dfrac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$ (2)

بجذر المعادلة (2) نكتب : $\sqrt{K} = \dfrac{\tau}{1-\tau}$ ، نستنتج $\tau = \dfrac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = \dfrac{\sqrt{251}}{1+\sqrt{251}} = 0{,}94$

التمرين 19

تصحيح : المحلول المقصود في التمرين هو أحادي كربونات الصوديوم (Na^+ , HCO_3^-)

1 – معادلة التفاعل : $HCO_3^-{}_{(aq)} + NH_{3(aq)} = NH_4^+{}_{(aq)} + CO_3^{2-}{}_{(aq)}$

2 – جدول التقدّم :

	$HCO_3^-{}_{(aq)}$ +	$NH_{3(g)}$ =	$NH_4^+{}_{(aq)}$ +	$CO_3^{2-}{}_{(aq)}$
$t = 0$	C_1V_1	C_2V_2	0	0
الحالة الانتقالية	$C_1V_1 - x$	$C_2V_2 - x$	x	x
الحالة النهائية	$C_1V_1 - x_f$	$C_2V_2 - x_f$	x_f	x_f

3 - $Q_r = \dfrac{[NH_4^+][CO_3^{2-}]}{[HCO_3^-][NH_3]}$

$Q_{r,i} = \dfrac{[NH_4^+][CO_3^{2-}]}{[HCO_3^-][NH_3]} = \dfrac{0\times 0}{C_1 \times C_2} = 0$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

4 - $Q_{r,f} = K = \dfrac{x_f^2}{(C_1V_1 - x_f)(C_2V_2 - x_f)}$ (1)

لدينا $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}}$ ، و لكي نحدّد التقدّم الأعظمي x_{max} يجب تحديد المتفاعل المحد في حالة فرض أن التفاعل تام .

$C_1V_1 - x = 0$ ، ومنه $x = C_1V_1 = 0{,}15 \times 0{,}03 = 4{,}5 \times 10^{-3}$ mol

$C_2V_2 - x = 0$ ، ومنه $x = C_2V_2 = 0{,}1 \times 0{,}02 = 2 \times 10^{-3}$ mol

نستنتج أن المتفاعل المحد هو محلول النشادر ، وبالتالي $x_{max} = C_2V_2$

من جهة أخرى لدينا $C_1V_1 = 2{,}25\, x_{max}$ $(C_1V_1 = 2{,}25\, C_2V_2)$

نعوّض في العلاقة (1) :

$$Q_{r,f} = \frac{x_f^2}{(2{,}25x_{max} - x_f)(x_{max} - x_f)} = \frac{x_f^2}{x_f x_f \left(\frac{2{,}25x_{max}}{x_f} - 1\right)\left(\frac{x_{max}}{x_f} - 1\right)}$$

$$Q_{r,f} = \frac{1}{\left(\frac{2{,}25}{\tau} - 1\right)\left(\frac{1}{\tau} - 1\right)} = \frac{\tau^2}{(2{,}25-\tau)(1-\tau)}$$

5 - نحل المعادلة $Q_{r,f} = \dfrac{\tau^2}{(2{,}25-\tau)(1-\tau)}$ ذات المجهول τ .

$\tau^2 = Q_{r,f}\,(2{,}25 - 3{,}25\,\tau + \tau^2)$

$Q_{r,f} = K = 7,9 \times 10^{-2}$ ولدينا ، $(Q_{r,f} - 1)\,\tau^2 - 3,25\, Q_{r,f}\,\tau + 2,25\, Q_{r,f} = 0$

حل المعادلة من الدرجة الثانية يعطينا جذرين هما $\tau_1 = 0,32$ ، $\tau_2 = -0,59$ (مرفوض)

نسبة التقدم النهائي هي 32 % .

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 20

1 – معادلة التفاعل : $Fe^{2+}_{(aq)} + Ag^{+}_{(aq)} = Fe^{3+}_{(aq)} + Ag_{(s)}$

2 - $$Q_r = \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}][Ag^{+}]} \qquad (1)$$

ثابت التوازن المعطى في التمرين $K = 3,2$ خاص بالتفاعل المباشر ، أي تفاعل شوارد الحديد الثنائي مع شوارد الفضة .

الحالة الأولى : $Q_r = \dfrac{10^{-2}}{10^{-2} \times 10^{-2}} = 100$

الحالة الثانية : $Q_r = \dfrac{5 \times 10^{-3}}{10^{-1} \times 10^{-1}} = 0,5$

3 - لو وجدنا في إحدى الحالتين مثلا $Q_r = 3,2$ ، فهذا معناه أن الجملة في حالة التوازن ، أي لا تنمو .

الحالة 1 : وجدنا $Q_r > K$ ، إذن الجملة غير متوازنة ، فلكي يصبح $Q_r = K$ يجب أن تنمو لكي يتناقص Q_r ، فمن أجل هذا الغرض يجب أن ينقص البسط في العلاقة (1) ويزداد المقام . معنى هذا يجب أن نضيف التقدم (x) لـ Fe^{2+} و Ag^{+} وننقصه من Fe^{3+} ، وبالتالي تنمو الجملة نحو اليسار .

الحالة 2 : وجدنا $Q_r < K$ ، إذن الجملة غير متوازنة ، فلكي يصبح $Q_r = K$ يجب أن تنمو لكي يزداد Q_r ، فمن أجل هذا الغرض يجب أن يزداد البسط في العلاقة (1) وينقص المقام . معنى هذا يجب أن نضيف التقدم (x) لـ Fe^{3+} وننقصه من Fe^{2+} و Ag^{+} ، وبالتالي تنمو الجملة نحو اليمين .

4 – في التحول الأول (الحالة 1) التفاعل الغالب هو التفاعل غير المباشر ، لذلك يكون ثابت التوازن لهذا التفاعل هو :

$$K' = \frac{1}{K} = \frac{1}{3,2} = 0,31$$

في التحوّل الثاني (الحالة 2) التفاعل الغالب هو التفاعل المباشر ، أي $K = 3,2$

5 – الحالة الأولى :

$Fe^{2+}_{(aq)}$	+	$Ag^{+}_{(aq)}$	=	$Fe^{3+}_{(aq)}$	+	$Ag_{(s)}$
10^{-2}		10^{-2}		10^{-2}		10^{-1}
$10^{-2} + x$		$10^{-2} + x$		$10^{-2} - x$		$10^{-1} - x$

عند التوازن يكون كسر التفاعل مساويا لثابت التوازن ، وبالتالي : $K = \dfrac{10^{-2} - x}{(10^{-2} + x)^2} = 3,2$

$10^{-2} - x = 3,2\,(10^{-2} + x)^2$ أو $3,2\,x^2 + 1,06\,x - 9,7 \times 10^{-3} = 0$

بحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية نجد جذرين هما : $x_1 = 8,75 \times 10^{-3}$ و $x_2 = -0,34$ (مرفوض لأنه سالب)

التقدم النهائي هو $x_f = 8,75 \times 10^{-3}$ mol

التركيب النهائي للوسط :

Fe^{2+}	Ag^{+}	Fe^{3+}	Ag
$10^{-2} + 8,75 \times 10^{-3} =$ $1,87 \times 10^{-2}$ mol	$10^{-2} + 8,75 \times 10^{-3} =$ $1,87 \times 10^{-2}$ mol	$10^{-2} - 8,75 \times 10^{-3} =$ $1,25 \times 10^{-3}$ mol	$10^{-1} - 8,75 \times 10^{-3} =$ $9,1 \times 10^{-2}$ mol

الحـالةالثانية :

$Fe^{2+}_{(aq)}$	+	$Ag^{+}_{(aq)}$	=	$Fe^{3+}_{(aq)}$	+	$Ag_{(s)}$
10^{-1}		10^{-1}		5×10^{-3}		
$10^{-1} - x$		$10^{-1} - x$		$5 \times 10^{-3} + x$		

عند التوازن يكون كسر التفاعل مساويا لثابت التوازن ، وبالتالي : $K = \dfrac{5\times10^{-3}+x}{(10^{-1}-x)^2} = 3,2$

$5 \times 10^{-2} + x = 3,2\,(10^{-1} - x)^2$ أو $3,2\,x^2 - 1,64\,x + 0,027 = 0$

بحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية نجد جذرين هما : $x_1 = 1,71 \times 10^{-2}$ و $x_2 = 0,49$ (مرفوض لأنه أكبر من 10^{-1})

التقدم النهائي هو $x_f = 8,75 \times 10^{-3}$ mol

التركيب النهائي للوسط :

Fe^{2+}	Ag^{+}	Fe^{3+}	Ag
$10^{-1} - 1,71 \times 10^{-2} =$ $8,3 \times 10^{-2}$ mol	$10^{-1} - 1,71 \times 10^{-2} =$ $8,3 \times 10^{-2}$ mol	$5 \times 10^{-3} + 1,71 \times 10^{-2} =$ $2,21 \times 10^{-2}$ mol	$10^{-1} + 1,71 \times 10^{-2} =$ $11,7 \times 10^{-2}$ mol

التمرين 21

1 – معـادلة التفاعل : $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^{-}_{(aq)} + H_3O^{+}_{(aq)}$

2 - جدول التقدم :

	$CH_3COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$CH_3COO^{-}_{(aq)}$ +	$H_3O^{+}_{(aq)}$
$t = 0$	C_0V_0	زيادة	0	0
الحالة الانتقالية	$C_0V_0 - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$C_0V_0 - x_f$	زيادة	x_f	x_f

من جدول التقدم نستنتج $x_f = n\,(H_3O^+)$ ، ولدينا $x_{max} = C_0V_0$

النسبة النهـائية للتقدّم $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \dfrac{n_0(H_3O^+)}{C_0V_0} = \dfrac{[H_3O^+]\times V_0}{C_0V_0} = \dfrac{[H_3O^+]}{C_0}$ ، ومنه : $[H_3O^+] = [CH_3COO^-] = C_0 \times \tau$

3 - المطلوب هو $[CH_3COOH]$ وليس $[CH_3COO^-]$

$$[CH_3COOH]_f = C_0 - [H_3O^+] = C_0 - C_0 \times \tau = C_0\,(1-\tau)$$

4 - ثابت الحموضة $K_A = \frac{[H_3O^+]_f \times [CH_3COO^-]_f}{[CH_3COOH]_f}$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

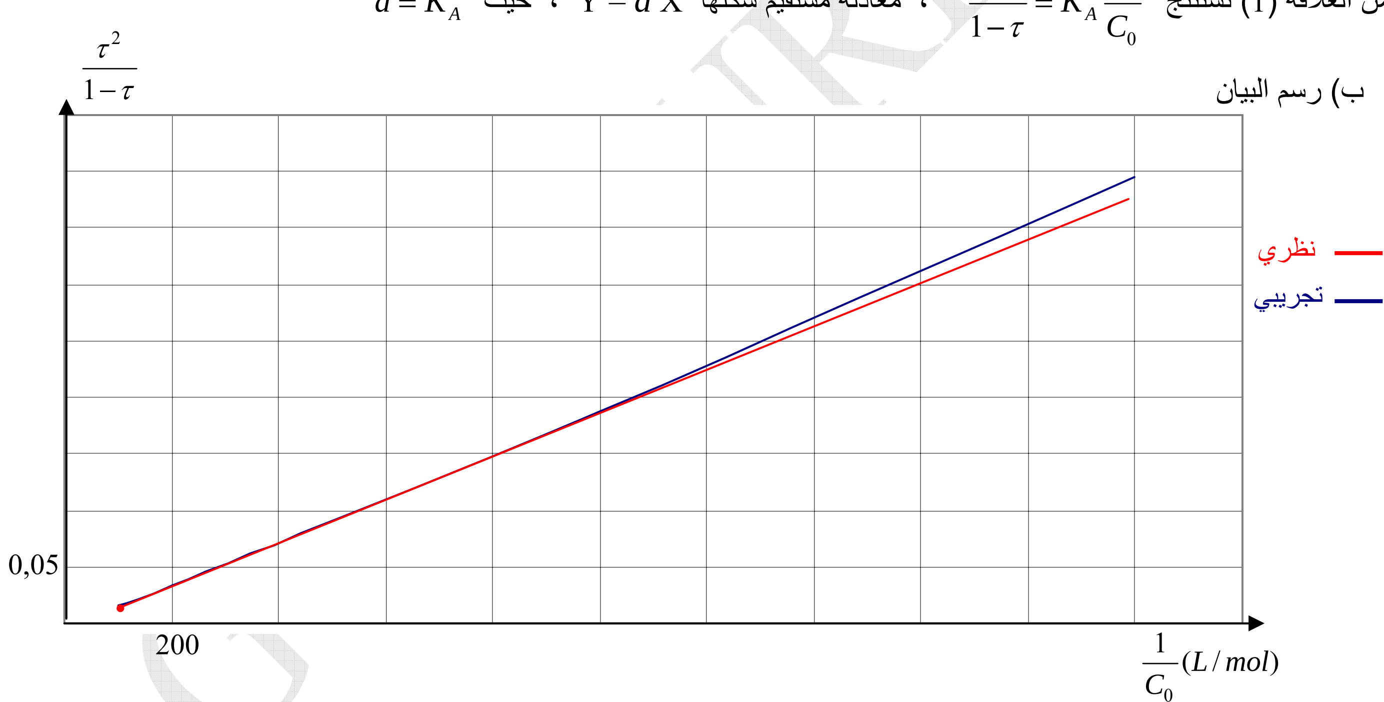
$$K_A = \frac{{C_0}^2 \times \tau^2}{C_0\,(1-\tau)} = C_0\,\frac{\tau^2}{1-\tau} \qquad (1)$$

5 - أ) إتمام الجدول :

C_0 (mol/L)	$1,0 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-4}$
$\tau \times 10^{-2}$	4,0	5,6	12,5	16,0
$X = \frac{1}{C_0}(L/mol)$	100	200	1000	2000
$Y = \frac{\tau^2}{1-\tau}$	$16,7 \times 10^{-4}$	$33,2 \times 10^{-4}$	$1,78 \times 10^{-2}$	$3,04 \times 10^{-2}$

من العلاقة (1) نستنتج $\frac{\tau^2}{1-\tau} = K_A \frac{1}{C_0}$ ، معادلة مستقيم شكلها Y = a X ، حيث $a = K_A$

ب) رسم البيان



من أجل حساب ثابت الحموضة K_A نأخذ مثلا القيمتين (X = 100 L/mol ، Y = $16,7 \times 10^{-4}$) .

$$K_A = \frac{16,7 \times 10^{-4}}{100} = 1,67 \times 10^{-5}$$

التمرين 22

1 – البروتوكول التجريبي :

المحلول S_0	C_0 = 0,2 mol/ L	V_0 = 500 mL

المحلول S	$C = 2 \times 10^{-3}$ mol/ L	V = 1 L

ملاحظة : كان من الأفضل توفير ماصات عيارية : 5 mL ، 10 mL ، 20 mL ، 50 mL

عدد مولات حمض البروبانويك n_0 (C_2H_5COOH) لا يتغير عندما نضيف المـاء ، أي $CV = C_0V_0'$

حيث V'_0 هو الحجم الذي نأخذه من المحلول S_1 ونضيف له الماء .

لدينا $C_0 = \frac{n_0}{V_0} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2\ mol/L$

$$V_0' = \frac{CV}{C_0} = \frac{2\times10^{-3}\times1}{0,2} = 10\ mL$$

الطريقة : نأخذ بواسطة الماصـة التي سعتها 10 mL الحجم V_0' من المحلول S_0 ونضعه في مخبـار سعته 1 L ثم نكمل الحجم بالماء المقطّر ، ونحصل بذلك على المحلول S .

2 – تصحيح : قدّم جدولا لتقدّم التفاعل المنمذج لتحوّل $2,0 \times 10^{-3}$ mol (ليس $2,0 \times 10^{-3}$ mol/ L)

جدول التقدّم :

	$C_2H_5COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$C_2H_5COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	2×10^{-3}	زيادة	0	0
الحالة الانتقالية	$2 \times 10^{-3} - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$2 \times 10^{-3} - x_{éq}$	زيادة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

3 - $\sigma = \lambda_{H_3O^+}\left[H_3O^+\right] + \lambda_{C_2H_5COO^-}\left[C_2H_5COO^-\right] + \lambda_{OH^-}\left[OH^-\right]$ ، وباهمال $[OH^-]$ نكتب :

$\sigma = \lambda_{H_3O^+}\left[H_3O^+\right] + \lambda_{C_2H_5COO^-}\left[C_2H_5COO^-\right]$ ، وبما أن $[H_3O^+] = [C_2H_5COO^-]$ نكتب :

$$\sigma = \left[H_3O^+\right]\left(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{C_2H_5COO^-}\right) \quad (1)$$

من جدول التقدّم لدينا $n(H_3O^+) = x_{éq}$ ، وبالتالي $\left[H_3O^+\right] = \frac{x_{éq}}{V}$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

بالتعويض في العلاقة (1) : $\sigma = \frac{x_{éq}}{V}\left(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{C_2H_5COO^-}\right) \quad (1)$

4 - تصحيح : $\sigma = 6,2 \times 10^{-3}\ S.m^{-1}$ (ليس $\sigma = 6,2 \times 10^{-5}\ S.m^{-1}$)

أ) كيفية قيـاس الناقلية النوعية :

- **الطريقة الأولى** : يوجد جهـاز يسمى مقياس الناقلية النوعية ، يتألف من مسبـار موصول لجهاز عرض رقمي .

لما نغمر المسبار في المحلول المراد قياس ناقليته النوعية نقرأ على شاشة الجهاز قيمة الناقلية النوعية مقدرة بـ $S.m^{-1}$.

- **الطريقة الثانية** : نستعمل خلية قيـاس الناقلية لقياس ناقلية المحلول (G) . نضبط توترا كهربائيا متناوبا بين الصفيحتين قيمته المنتجة U_{eff} (لا نستعمل توترا مستمرا ، لأن مرور التيار المستمر يمكن أن يسبّب تحليلا كهربائيا للمحلول مما يجعل قياس ناقليته غير دقيق) .

نقرأ شدة التيار المنتجة على مقياس الأمبير ، ثم نحسب الناقلية $G=\frac{I_{eff}}{U_{eff}}$ ، ومن العلاقة $\sigma=\frac{G}{K}$ نستنتج التاقلية النوعية ، مع العلم أن K هو ثابت الخلية وقيمته مسجّلة على الجهـاز .

ب) يجب أن نستعمل محاليل ممدّدة (من الأفضل أن يكون تركيزها محصورا بين 10^{-2} mol/L و 10^{-3} mol/L) ، لأن إذا كان المحلول مركزا فإن الناقلية المولية الشاردية (λ) تصبح تتعلق بتركيز المحلول ، وبالتالي تصبح العلاقة التي نطبقها $\sigma = \lambda C$ غير دقيقة ، أما إذا كان المحلول ممددا فإن λ تكون مستقلة عن التركيز المولي للمحلول .

مثلا $\lambda_{H_3O^+}=35\times10^{-3}\,S.m^2.mol^{-1}$ من أجل محلول ممدد ، أما إذا كان مركزا فإن هذه القيمة غير ثابتة .

جـ) من العلاقة (1) نستنتج التقدم عند التوازن $x_{éq}=\frac{V\sigma}{\lambda_{H_3O^+}+\lambda_{C_2H_5COO^-}}$ ، مع العلم أن $V = 1\ L = 10^{-3}\ m^3$

$$x_{éq}=\frac{1\times10^{-3}\times6,2\times10^{-3}}{38,58\times10^{-3}}=1,6\times10^{-4}\,mol$$

$$[H_3O^+]=[C_2H_5COO^-]=\frac{x_f}{V}=\frac{1,6\times10^{-4}}{1}=1,6\times10^{-4}\,mol/L$$

$$[OH^-]=\frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}=\frac{10^{-14}}{1,6\times10^{-4}}=6,25\times10^{-11}\,mol/L$$

5 – عند حالة التوازن يكون : $[C_2H_5COOH]_f=C-[H_3O^+]_f=2\times10^{-3}-1,6\times10^{-4}=1,84\times10^{-3}\,mol/L$

6 - ثابت التوازن : $K=\frac{[C_2H_5COO^-]_f\times[H_3O^+]_f}{[C_2H_5COOH]_f}=\frac{(1,6\times10^{-4})^2}{1,84\times10^{-3}}=1,4\times10^{-5}$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 23

1 - $CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

$CH_2ClCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_2ClCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

جدول تقدم تفاعل حمض الإيثانويك مع الماء :

	$CH_3COOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$CH_3COO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	10^{-3}	زيـادة	0	0
الحالة الانتقالية	$10^{-3} - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$10^{-3} - x_{éq}$	زيادة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

جدول تقدم تفاعل حمض أحـادي كلور الإيثانويك مع المـاء :

	$CH_2ClCOOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$CH_2ClCOO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
$t = 0$	10^{-3}	زيـادة	0	0
الحالة الانتقالية	$10^{-3} - x$	زيادة	x	x
الحالة النهائية	$10^{-3} - x_{éq}$	زيادة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

ملاحظة : نعتبر درجة حرارة المحلولين 25°C ، لكي نأخذ الجداء الشاردي للماء $K_e = 10^{-14}$ ، وفي هذه الحالة تكون قيمتا الـ pH هما على الترتيب $pH_1 = 3,55$ ، $pH_2 = 2,7$

2 - بالنسبة لمحلول حمض الإيثانويك :

$$\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-3,55} = 2,82\times10^{-4}\ mol/L \quad ، \quad \left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{10^{-pH_1}} = \frac{10^{-14}}{2,82\times10^{-4}} = 3,54\times10^{-11}\ mol/L$$

انطلاقا من أن المحاليل معتدلة كهربائيا ، فإن مجموع الشوارد الموجبة في المحلول يساوي مجموع الشوارد السالبة ، أي :

$[H_3O^+] = [CH_3COO^-] + [OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ نكتب : $[CH_3COO^-] \approx [H_3O^+] = 2,82 \times 10^{-4}$ mol/ L

وحسب قانون انحفاظ المـادة فإن : $C_1 = [CH_3COO^-]_f + [CH_3COOH]_f$ ، ومنه :

$[CH_3COOH]_f = C_1 - [CH_3COO^-]_f = 5 \times 10^{-3} - 2,82 \times 10^{-4} = 4,72 \times 10^{-3}$ mol/L

بالنسبة لمحلول حمض أحـادي كلور الإيثانويك :

$$\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-2,7} = 2,0\times10^{-3}\ mol/L \quad ، \quad \left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{10^{-pH_2}} = \frac{10^{-14}}{2,0\times10^{-3}} = 5,0\times10^{-12}\ mol/L$$

حسب قانون انحفاظ الشحنة فإن مجموع الشوارد الموجبة في المحلول يساوي مجموع الشوارد السالبة ، أي :

$[H_3O^+] = [CH_2ClCOO^-] + [OH^-]$ ، وبإهمال $[OH^-]$ نكتب : $[CH_2ClCOO^-] \approx [H_3O^+] = 2,51 \times 10^{-3}$ mol/ L

وحسب قانون انحفاظ مـادة الحمض فإن : $C_2 = [CH_2ClCOO^-]_f + [CH_2ClCOOH]_f$ ، ومنه :

$[CH_2ClCOOH]_f = C_2 - [CH_2ClCOO^-]_f = 5\times10^{-3} - 2\times10^{-3} = 3{,}0\times10^{-3}$ mol/L

3 - $$K_{A_1} = \frac{[H_3O^+]_f \times [CH_3COO^-]_f}{[CH_3COOH]_f} = \frac{(2{,}82\times10^{-4})^2}{4{,}72\times10^{-3}} = 1{,}7\times10^{-5}$$

$$K_{A_2} = \frac{[H_3O^+]_f \times [CH_2ClCOO^-]_f}{[CH_2ClCOOH]_f} = \frac{(2\times10^{-3})^2}{3\times10^{-3}} = 1{,}33\times10^{-3}$$

4 - حمض أحادي كلور الإيثانويك أقوى من حمض الإيثـانويك (كلما كانت قيمة K_A أكبر يكون الحمض أقوى) .

نلاحظ في عبارة الـ K_A أنه من أجل أن يكون هذا الأخير أكبر يجب أن يزداد البسط وينقص المقام . ازدياد البسط معناه تزايد تركيزي الشاردتين H_3O^+ و CH_3COO^- (حمض الإيثانويك كمثال) وبالتالي ازدياد تشرد الحمض ، وفي هذه الحالة ينقص تركيز CH_3COOH الموجود في المقام .

ملاحظة : هذه المقارنة صحيحة حتى لو كان تركيزا الحمضين C_1 و C_2 مختلفين .

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 24

1 – التركيز المولي للمحلول (S) : $C_a = \frac{n}{V}$ (1)

لدينا عدد مولات الحمض $n = \frac{m}{M} = \frac{0{,}305}{122} = 2{,}5\times10^{-3}\ mol$ ، وبتعويض قيمة n في العلاقة (1) :

$$C_a = \frac{2{,}5\times10^{-3}}{0{,}5} = 5{,}0\times10^{-3}\ mol/L$$

2 – نحسب حجم المحلول الأساسي اللازم للتكافؤ ، وذلك من العلاقة $C_a V_a = C_b V_{bE}$

$$V_{B_E} = \frac{C_a V_a}{C_b} = \frac{5\times10^{-3}\times10}{5\times10^{-3}} = 10\ mL$$

رفضنا البيانات الأخرى لأن :

البيان (II) :

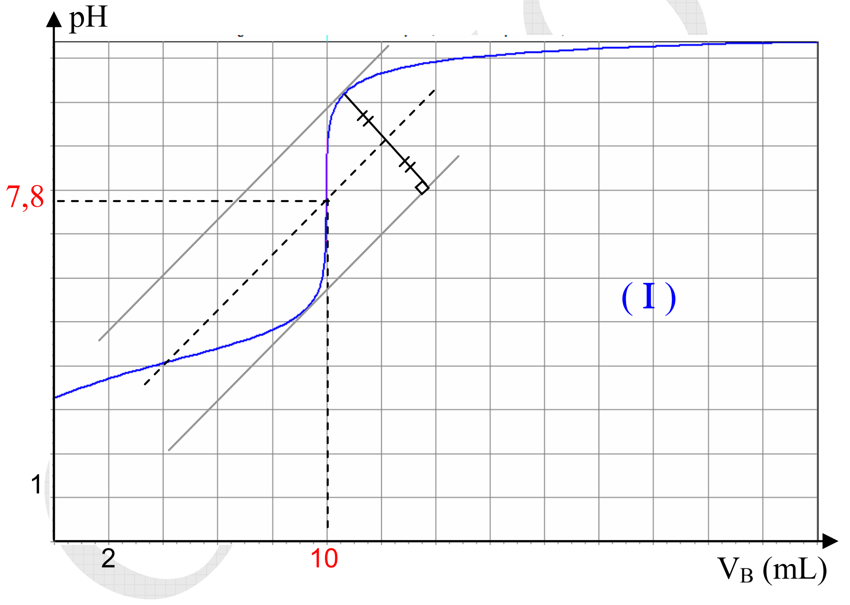
رغم أن الحمض المعايَر عبارة عن حمض ضعيف

لأن pH الابتدائي يساوي 3,3 ، معناه :

$[H_3O^+] = 10^{-3,3}$ mol/L وهي قيمة أصغر من C .

لكن حجم المحلول الأساسي المضاف عند التكافؤ

هو 20 mL ، وهذا لا يوافق لأن $V_{BE} = 10$ mL



البيانان (III) و (IV) خاصان بمعايرة أساسين وليس بمعايرة حمضين لأن pH الابتدائي في كليهما أكبر من 7 (pH =11 في كليهما)

التمرين 25

1 – في نقطة تقاطع البيانين تكون النسبة المئوية لـ $[HCOO^-]$ مساوية لـ $[HCOOH]$

في العلاقة $pH = pK_A + Log\frac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$ ، نضع $[HCOO^-] = [HCOOH]$ ، وبالتالي يكون

ومنه $pH = pK_A$ ، $pH = pK_A + Log\ 1$

بإسقاط نقطة تقاطع البيانين على محور الـ pH نجد القيمة 3,8 ، أي $pK_A = 3{,}8$

2 - من أجل $pH = 5$ نجد $[HCOOH] = 7\ \%$ و $[HCOO^-] = 93\ \%$ (انظر للشكل)

3 - بما أن $[HCOOH] = 2\ [HCOO^-]$ ، ونعلم أن مجموع النسبتين المئويتين للفردين هو 100 % ، أي :

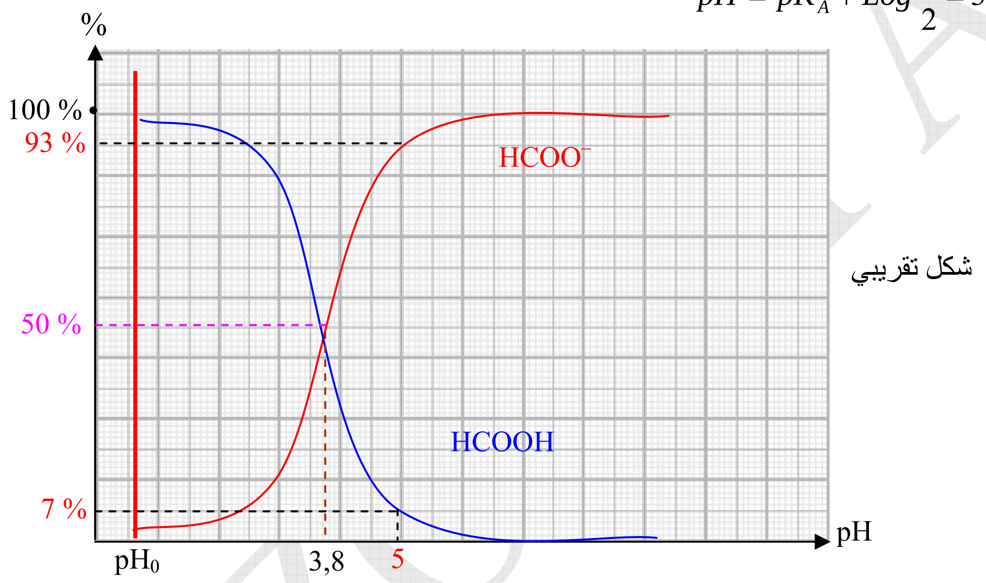
$[HCOOH] + [HCOO^-] = 100$ ، إذن : $2\ [HCOO^-] + [HCOO^-] = 100$ ، ومنه : $3[HCOO^-] = 100$

وبالتالي : $[HCOO^-] = 33{,}3\ \%$ ، ونستنتج $[HCOOH] = 66{,}6\ \%$

الـ pH الموافق لهاتين النسبتين هو 3,5 .

يمكن استعمال العلاقة $pH = pK_A + Log\dfrac{[HCOO^-]}{[HCOOH]}$ ، نكتب : $pH = pK_A + Log\dfrac{[HCOO^-]}{2[HCOO^-]} = pK_A + Log\dfrac{1}{2}$

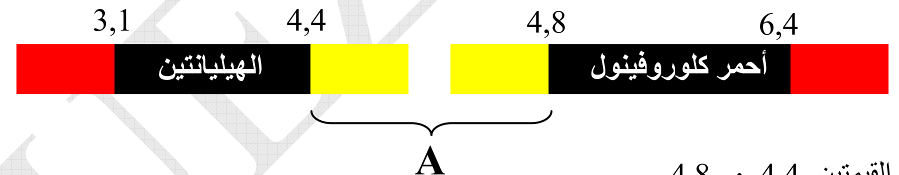
$$pH = pK_A + Log\frac{1}{2} = 3{,}8 - 0{,}3 = 3{,}5$$



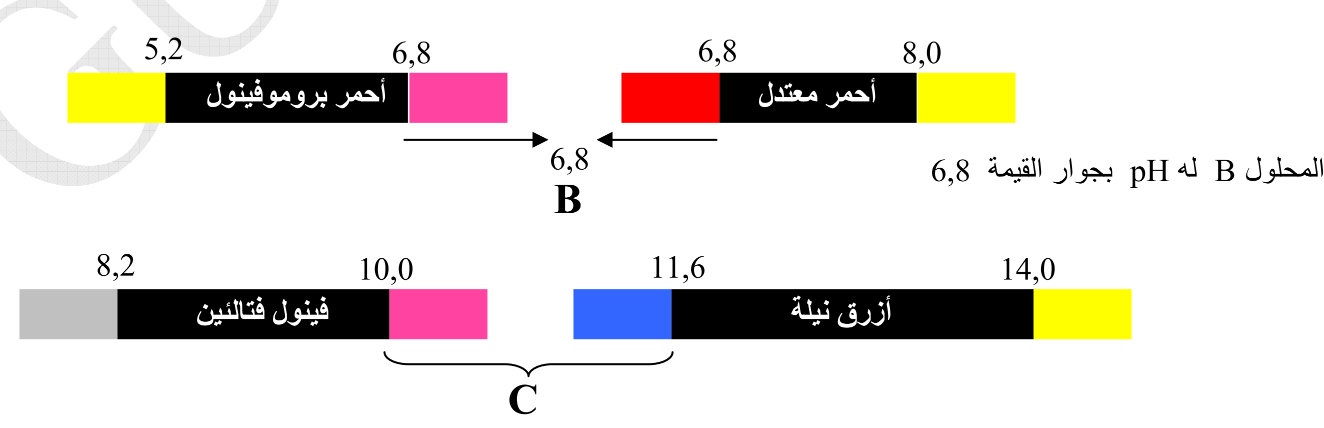
شكل تقريبي

التمرين 26

1 - مثلنا كل ألوان الكواشف باللون الأسود ، ومثلنا اللون الشفاف بالرمادي



المحلول A له pH محصور بين القيمتين 4,4 و 4,8



المحلول B له pH بجوار القيمة 6,8

المحلول C له pH محصور بين القيمتين 10 و 11,6

ملاحظة : حصر قيم الـ pH الذي نتكلم عنه ليس دقيقا ، لأن مجالات تغير ألوان الكواشف تتعلق بالرؤية ، أي بالقدرة على تمييز الألوان عن بعضها .

القيم الدقيقة نسبيا يعطيها مقياس الـ pH المعايَرُ بطريقة صحيحة .

2 - لا يمكن إجراء أي اختبار إضافي بواسطة هذه الكواشف ، لأن حدود صفاتها الأساسية كلها أقل من القيمة 10 .

لكي نضيّق المجال الذي يشمل pH المحلول C يجب أن نبحث عن كاشف ملون تكون فيه الصفة الحمضية محدودة بقيمة أقل من 11,6 .

التمرين 27

1 – معادلة التفاعل : $HCOOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = HCOO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2 - أ) معادلة تفاعل المعايرة : $HCOOH_{(aq)} + (Na^+, OH^-)_{(aq)} = (Na^+, HCOO^-)_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

أو اختصارا $HCOOH_{(aq)} + OH^-_{(aq)} = HCOO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ (لأن Na^+ شاردة غير فعالة في الماء)

ملاحظة :

وضعنا في تفاعل المعايرة الإشارة = لسبب أننا نريد أن نتأكد في آخر التمرين من أن تفاعل المعايرة تام ، (والذي **يجب** أن يكون تـاما)

ب) عند التكافؤ تكون كمية مادة كل متفاعل قد انتهت . وبالتالي : $C_1\ V_a = C_b\ V_{b_E}$ ، ومنه :

$$V_{b_E} = \frac{C_1\ V_a}{C_b} = \frac{0,1 \times 80}{0,25} = 32\ mL$$

جـ) لدينا pH = 3,8 ، ومنه $\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-3,8} = 1,6 \times 10^{-4}\ mol/L$

من الجداء الشاردي للماء في الدرجة 25°C نستنتج $\left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{\left[H_3O^+\right]} = \frac{10^{-14}}{1,6 \times 10^{-4}} = 6,25 \times 10^{-11}\ mol/L$

أما كمية مادة OH^- فهي : $n\left(OH^-\right) = \left[OH^-\right] \times \left(\frac{1}{2}V_{b_E} + V_a\right) = 6,25 \times 10^{-11} \times 96 \times 10^{-3} = 6,0 \times 10^{-12}\ mol/L$

جدول التقدّم : نحسب أولا كمية مادة الحمض والأساس في اللحظة $t = 0$

$n\ (HCOOH) = C_1\ V_a = 0,1 \times 0,08 = 8,0 \times 10^{-3}\ mol/L$

$n\left(OH^-\right) = C_b \times \frac{1}{2}V_{b_E} = 0,25 \times 0,016 = 4 \times 10^{-3}\ mol/L$ ، نضع $V' = \frac{1}{2}V_{b_E}$ ، وهو الحجم من الأساس المضاف عند نصف التكافؤ ، ونرمز للتقدم عند نصف التكافؤ بـ $x_{éq}$

نعلم أن المتفاعل المحدّ هو OH^- ، وبالتالي $x_{max} = 4 \times 10^{-3}$ mol

	$HCOOH_{(aq)}$ +	$OH^-_{(aq)}$ =	$HCOO^-_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$
$t = 0$	8×10^{-3}	4×10^{-3}	0	زيادة
الحالة الانتقالية	$8 \times 10^{-3} - x$	$4 \times 10^{-3} - x$	x	زيادة
الحالة النهائية	$8 \times 10^{-3} - x_{éq}$	$4 \times 10^{-3} - x_{éq}$	$x_{éq}$	زيادة

من أجل حساب $x_{éq}$ لدينا طريقتان هما :

الطريقة الأولى : عند نصف التكافؤ كان لدينا $n\left(OH^-\right) = 6,0 \times 10^{-12}\ mol/L$ ، وهذه الكمية من جدول التقدم هي نفسها $4 \times 10^{-3} - x_{éq}$ ، وبالتالي : $x_{éq} = 4 \times 10^{-3} - 6 \times 10^{-12} \approx 4 \times 10^{-3}$ mol

الطريقة الثانية :

لدينا من جدول التقدم $x_{éq} = n\ (HCOO^-)$

قانون انحفاظ الشحنة يعطينا $[OH^-] + [HCOO^-] = [H_3O^+] + [Na^+]$

ولدينا : $\left[Na^+\right] = \frac{C_b \times V'}{V_a + V'} = \frac{0,25 \times 16}{96} = 4,2 \times 10^{-2}\ mol/L$ ، $\left[H_3O^+\right] = 1,6 \times 10^{-4}\ mol/L$

$\left[OH^-\right] = 6,25 \times 10^{-11}\ mol/L$

وبإهمال $[OH^-]$ ، نكتب $[HCOO^-] \approx [Na^+] = 4,2 \times 10^{-2}\ mol/L$

وبالتالي $x_{éq} = n\ (HCOO^-) = [HCOO^-]\ (V_a + V') = 4,2 \times 10^{-2} \times 0,096 = 4,0 \times 10^{-3}\ mol$

بواسطة إحدى الطرق نحسب نسبة التقدم النهائي لتفاعل المعايرة $\tau = \frac{x_{éq}}{x_{max}} = \frac{4 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 1$ ، ومنه نستنتج أن تفاعل المعايرة هو تفاعل تــام .

ملاحظة : يمكن أن نحسب التقدم النهائي بواسطة أي حجم مضاف من المحلول الأساسي ، أقصد ليس فقط في نقطة نصف التكافؤ ، معناه يكفي أن نعرف حجم المحلول الأساسي المضاف وقيمة pH المزيج عند إضافة هذا الحجم) .

التمرين 28

1 – معـادلة التفاعل : $C_6H_5COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2 -

تذكرة ريـاضية : لتكن الدالة $y = f(x)$. إن المشتق الثاني لهذه الدالة يحدد نقطة انعطـاف بيان الدالة إن وُجدت هذه النقطة .

إن حل المعادلة $f''(x) = 0$ يحدد فاصلة نقطة الإنعطاف .

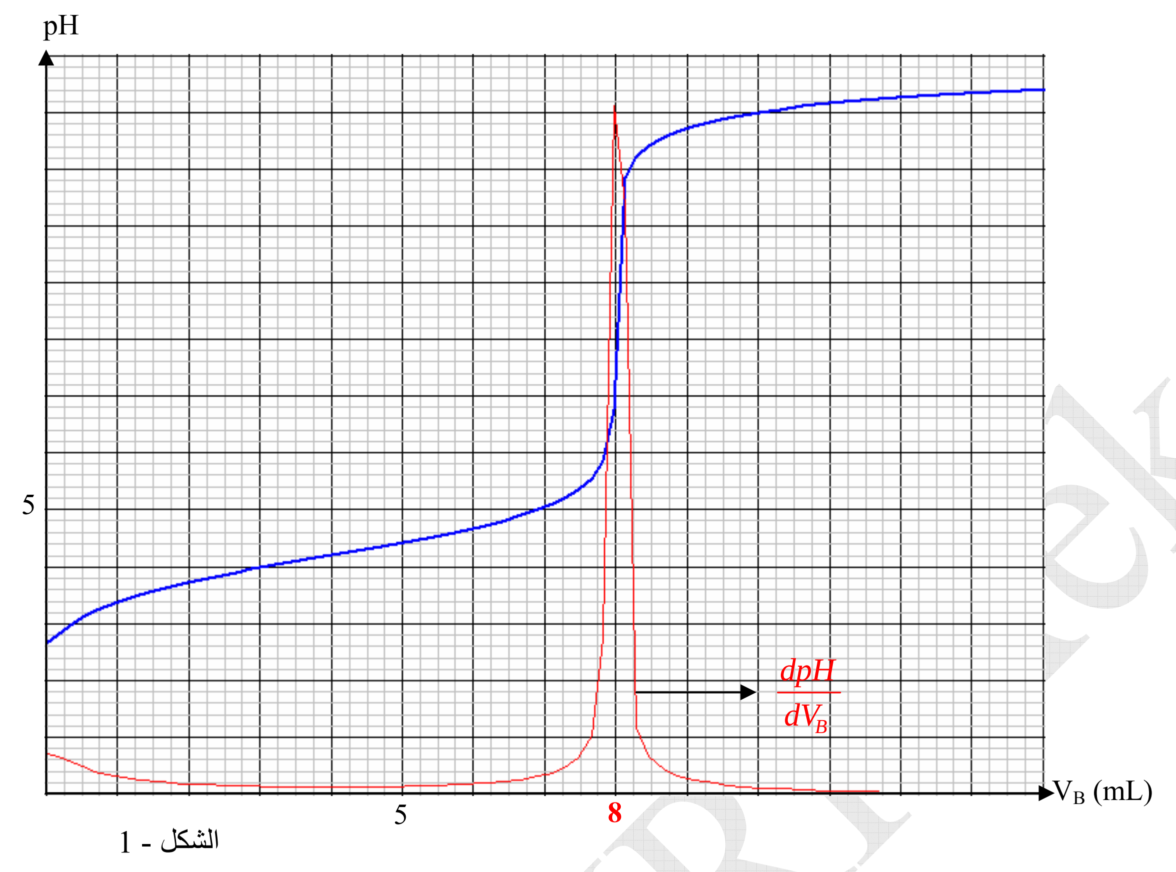
لو رسمنا بيان المشتق الأول $f'(x)$ لوجدناه يمر بنهاية حدّية لها نفس فاصلة نقطة الانعطاف .

بالنسبة لموضوعنا الدالة هي $pH = f(V_B)$ والبيان يحتوي على نقطتي انعطاف ، إحداهما واضحة جدا هي نقطة التكافؤ .

مشتق هذه الدالة هو $\frac{dpH}{dV_B}$ ، معنى هذا أن بيان المشتق الثاني (اللون الأحمر) يمر بنقطة التكافؤ .

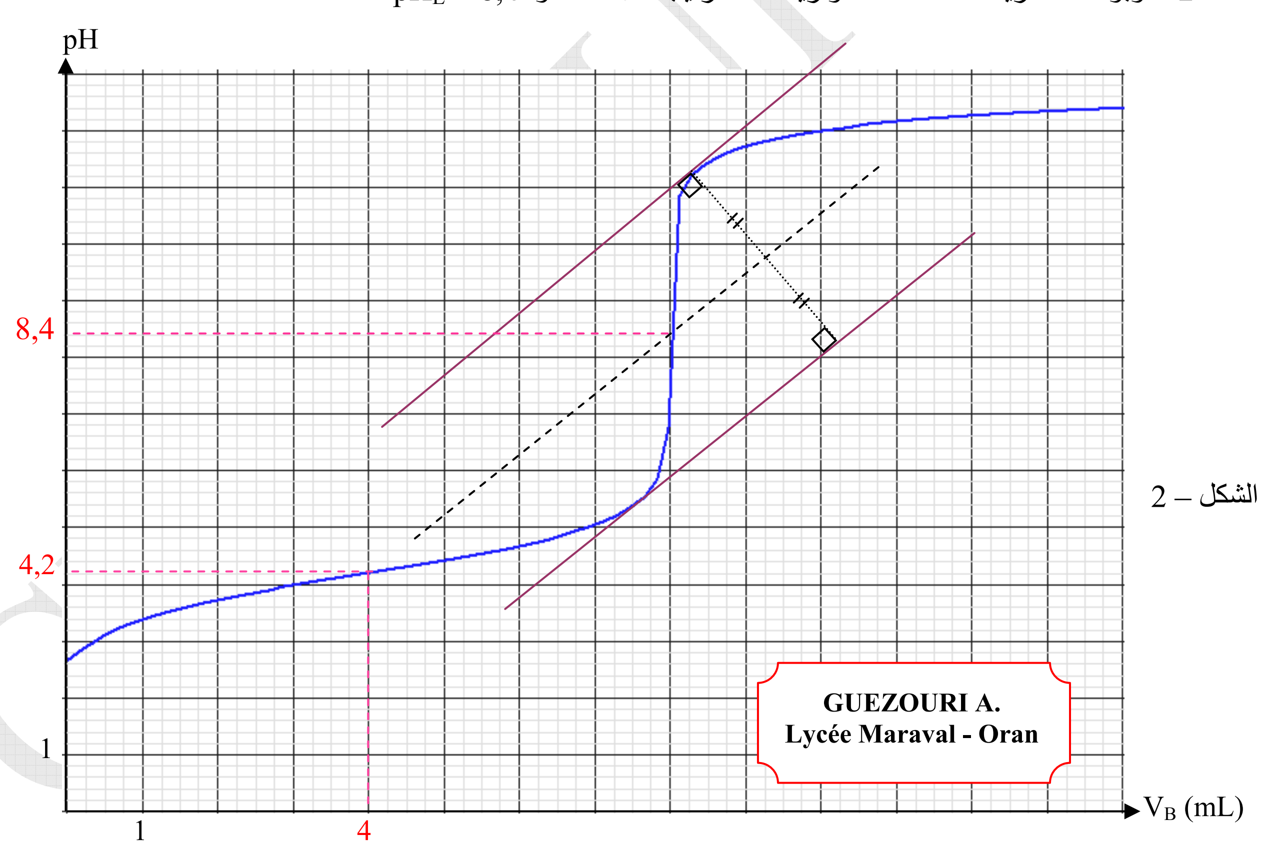
ملاحظة : البيان $pH = f(V_B)$ يُمكن رسمه من القيم التجريبية لـ pH و V_B ، لكن البيان $\frac{dpH}{dV_B} = g(V_B)$ لا نمثله إلا بواسطة برنامج معلوماتي .

من الشكل – 1 نستنتج حجم المحلول الأساسي المضاف عند التكافؤ : $V_{bE} = 8\ mL$ لأن قيمة هذا الحجم هي فاصلة النهاية العظمى لبيان الدالة $g(V_B) = \frac{dpH}{dV_B}$



الشكل - 1

من الشكل – 2 ، وبواسطة طريقة المماسات المتوازية نحدد ترتيب نقطة التكافؤ $pH_E = 8,4$



الشكل – 2

3 - عند نقطة التكافؤ يكون عدد مولات الحمض مساويا لعدد مولات الأساس $n\ (C_6H_5COOH) = n\ (OH^-)$ ، وبالتالي :

$C_a V_a = C_b V_{bE}$ ، ومنه : $C_a = \frac{C_b\ V_{b_E}}{V_a} = \frac{0,1\times 8}{10} = 8,0\times 10^{-2}\ mol/L$

4 – من أجل الحجم $V_b = 4$ mL يكون pH المزيج مساويا للقيمة 4,2 ، وبالتالي $[H_3O^+] = 10^{-4,2} = 6,31 \times 10^{-5}$ mol/ L

ومنه $\left[OH^-\right] = \dfrac{10^{-14}}{6{,}31 \times 10^{-5}} = 1{,}6 \times 10^{-10}\ mol/L$. أما عدد مولات OH^- فهو $n\,(OH^-) = [OH^-] \times (V_a + V_{bE})$

$$n\,(OH^-) = 1{,}6 \times 10^{-10} \times (10 + 4) \times 10^{-3} = 2{,}24 \times 10^{-12}\ mol/L$$

5 - ننشئ جدول التقدّم :

كمية مادة حمض البنزويك هي $C_a\ V_a = 0{,}08 \times 10 \times 10^{-3} = 8{,}0 \times 10^{-4}\ mol$

كمية مادة حمض الأسـاس هي $C_b\ V_{bE} = 0{,}1 \times 4 \times 10^{-3} = 4{,}0 \times 10^{-4}\ mol$

	$C_6H_5COOH_{(aq)}$ +	$OH^-_{(aq)}$ =	$C_6H_5COO^-_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$
$t = 0$	8×10^{-4}	4×10^{-4}	0	زيادة
الحالة الانتقالية	$8 \times 10^{-4} - x$	$4 \times 10^{-4} - x$	x	زيادة
الحالة النهائية	$8 \times 10^{-4} - x_{éq}$	$4 \times 10^{-4} - x_{éq}$	$x_{éq}$	زيادة

عندما أضفنا الحجم $V_b = 4\ mL$ كان لدينا في المزيج عدد مولات OH^- هو $n\,(OH^-) = 2{,}24 \times 10^{-12}\ mol/L$ ، وهذا العدد هو نفسه $4 \times 10^{-4} - x_{éq}$ ، وبالتالي : $x_{éq} = 4 \times 10^{-4} - 2{,}24 \times 10^{-12} \approx 4 \times 10^{-4}\ mol$

المتفاعل المحدّ هو الأسـاس ، أي شوارد OH^- ، وبالتالي $x_{max} = 4 \times 10^{-4}\ mol$

النسبة النهائية لتقدّم تفاعل المعـايرة هي : $\tau = \dfrac{x_{éq}}{x_{max}} = \dfrac{4 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 1$ ، ونستنتج أن تفاعل المعايرة هو تفاعل تـام .

التمرين 29 (ليس 30)

1 – لكي نبيّنَ أن حمض البنزويك (حمض البنزين) هو حمض ضعيف نقارن بين $[H_3O^+]$ والتركيز المولي للحمض C_1 .

لدينا $\left[H_3O^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-3{,}1} = 7{,}9 \times 10^{-4}\ mol/L$ ، ولدينا $C_1 = 0{,}10\ mol/L$ ، ومنه $[H_3O^+] < C_1$

ومن هذا نستنتج أن حمض البنزويك لم يتشرد كليا في الماء ، وبالتالي هو حمض ضعيف .

2 – معادلة التفاعل مع المـاء : $C_6H_5COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

عبارة ثابت الحموضة للثنائية $C_6H_5COOH\,/\,C_6H_5COO^-$: $K_A = \dfrac{\left[H_3O^+\right] \times \left[C_6H_5COO^-\right]}{\left[C_6H_5COOH\right]}$

3 - المحلول المـائي لبنزوات الصوديوم يحتوي على الشوارد Na^+ ، $C_6H_5COO^-$ ، H_3O^+ ، OH^-

إن شاردة البنزوات $C_6H_5COO^-$ تتفاعل مع الماء لأنها أساس مرافق لحمض ضعيف .

معادلة تفاعلها مع الماء تكون كما يلي : $C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)} = C_6H_5COOH_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$ (1)

فبتفاعلها هذا مع المـاء تضيف للمحلول شوارد OH^- مما يجعل هذا المحلول ذا طبيعة أساسية .

حذار : لا تقول بأن في نفس الوقت لما إزدادت شوارد OH^- في المحلول إزداد كذلك الحمض C_6H_5COOH .

هذا الكلام خطأ لأن جزيئات الحمض لا تغير الـ pH . الذي يغير الـ pH هي شوارد H_3O^+ .

لكي نبيّن أن شاردة البنزوات هي أساس ضعيف نقارن بين التركيز المولي لبنزوات الصوديوم الذي هو نفسه التركيز المولي للبنزوات ، لأن بنزوات الصوديوم تتشرد كليا في الماء ، والتركيز المولي لشوارد OH^- .

لدينا $\left[H_3O^+\right]=10^{-pH}=10^{-8,1}=7,9\times10^{-9}\ mol/L$ ، ومن الجداء الشاردي للماء نستنتج التركيز المولي لشوارد

الهيدروكسيد : $\left[OH^-\right]=\frac{10^{-14}}{\left[H_3O^+\right]}=\frac{10^{-14}}{7,9\times10^{-9}}=1,26\times10^{-6}\ mol/L$

لدينا $C_2 = 10^{-2}$ mol/ L وهذه القيمة أكبر بكثير من $[OH^-]$ ، وبالتالي شاردة البنزوات أساس ضعيف .

4 - كتبنا معادلة تفاعل البنزوات مع الماء (انظر المعادلة 1)

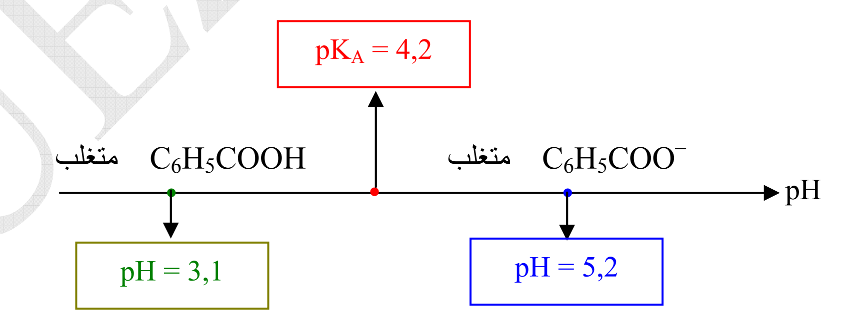
ثابت التوازن لهذا التفاعل : $K=\frac{\left[OH^-\right]_f\times\left[C_6H_5COOH\right]_f}{\left[C_6H_5COO^-\right]_f}$

5 -

من العلاقة $pH = pK_A + Log\frac{\left[C_6H_5COO^-\right]}{\left[C_6H_5COOH\right]}$

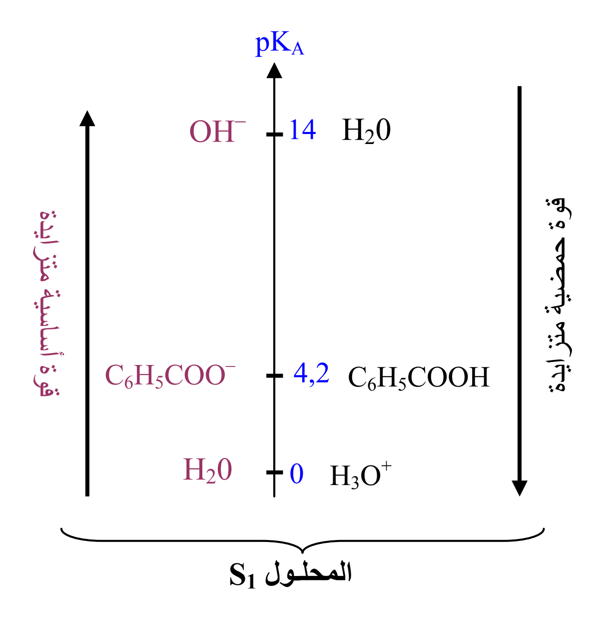
نستنتج أنه لما يكون في المحلول $pH = pK_A$ للثنائية $C_6H_5COOH / C_6H_5COO^-$ ، يكون تركيزا الفردين الكيميائيين في هذه الثنـائية متساويين .

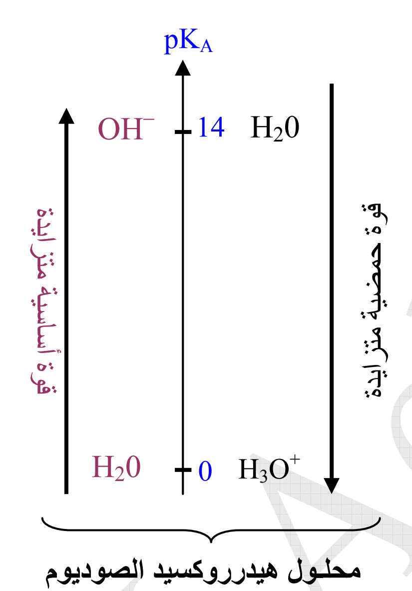
أما لما يصبح pH أكبر من pK_A يصبح $Log\frac{\left[C_6H_5COO^-\right]}{\left[C_6H_5COOH\right]}>0$ ، أي أن البسط أكبر من المقام في النسبة $\frac{\left[C_6H_5COO^-\right]}{\left[C_6H_5COOH\right]}$ ، وبالتالي يكون الفرد المتغلب من أجل $pH = 5,2$ هو $C_6H_5COO^-$ ، أي الصفة المتغلبة هي الصفة الأسـاسية .



GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

6 – سلم الـ pK_A





7 - معادلة تفاعل S_1 مع هيدروكسيد الصوديوم :

$$C_6H_5COOH_{(aq)} + (Na^+, OH^-)_{(aq)} = (C_6H_5COO^-, Na^+)_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

أو اختصارا

$$C_6H_5COOH_{(aq)} + OH^-_{(aq)} = C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$$

ثابت التوازن

$$K = \frac{\left[C_6H_5COO^-\right]}{\left[C_6H_5COOH\right]\times\left[OH^-\right]}$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 30 (ليس 29)

$pH = 4,2$ (ليس 4,18)

1 – معادلة التفاعل : $HIn_{(aq)} + H_2O_{(l)} = H_3O^+_{(aq)} + In^-_{(aq)}$

2 - $\left[H_3O^+\right]_f = 10^{-pH} = 10^{-4,2} = 6,3\times10^{-5}\ mol/L$

3 – كمية مادة الحمض الابتدائية هي $n\,(HIn) = C_0\,V = 2,9\times10^{-4}\times0,1 = 2,9\times10^{-5}$ mol

ننشئ جدول التقدّم

	$HIn_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ =	$H_3O^+_{(aq)}$ +	$In^-_{(aq)}$
$t = 0$	$2,9\times10^{-5}$	زيادة	0	0
نهاية التفاعل	$2,9\times10^{-5} - x_{éq}$	زيادة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

من جدول التقدم لدينا : $x_{max} = C_0\,V$ و $x_f = n\,(H_3O^+)$

النسبة النهائية للتقدّم هي

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{\left[H_3O^+\right]\times V}{C_0\times V} = \frac{\left[H_3O^+\right]}{C_0} = \frac{6,3\times10^{-5}}{2,9\times10^{-4}} = 0,21$$

لدينا نسبة التقدم النهائي $\tau < 1$ ، وبالتالي الحمض (الكاشف الملوّن) لا يتشرّد كليا في المـاء

4 - ثابت الحموضة للثنائية أساس / حمض (HIn / In^-) هو $$K_A = \frac{[H_3O^+]\times[In^-]}{[HIn]} \quad (1)$$

5 - في حالة حمض ضعيف في الماء $K_A = K$.

الأنواع الكيميائية المتواجدة في المحلول هي : H_3O^+ ، OH^- ، In^- ، HIn

$$[H_3O^+] = [In^-] = 6{,}3\times10^{-5}\ mol/L \quad ، \quad [OH^-] = \frac{10^{-14}}{6{,}3\times10^{-5}} = 1{,}6\times10^{-10}\ mol/L$$

$$[HIn] = C_0 - [H_3O^+] = 2{,}9\times10^{-4} - 6{,}3\times10^{-5} = 2{,}27\times10^{-4}\ mol/L$$

بالتعويض في العلاقة (1) $$K_A = \frac{(6{,}3\times10^{-5})^2}{2{,}27\times10^{-4}} = 1{,}75\times10^{-5}$$

6 - $pK_A = -\text{Log}\ K_A = -\text{Log}\ 1{,}75\times10^{-5} = 4{,}7$ ، ونستنتج من الجدول أن الكاشف الملوّن هو أخضر بروموكريزول .

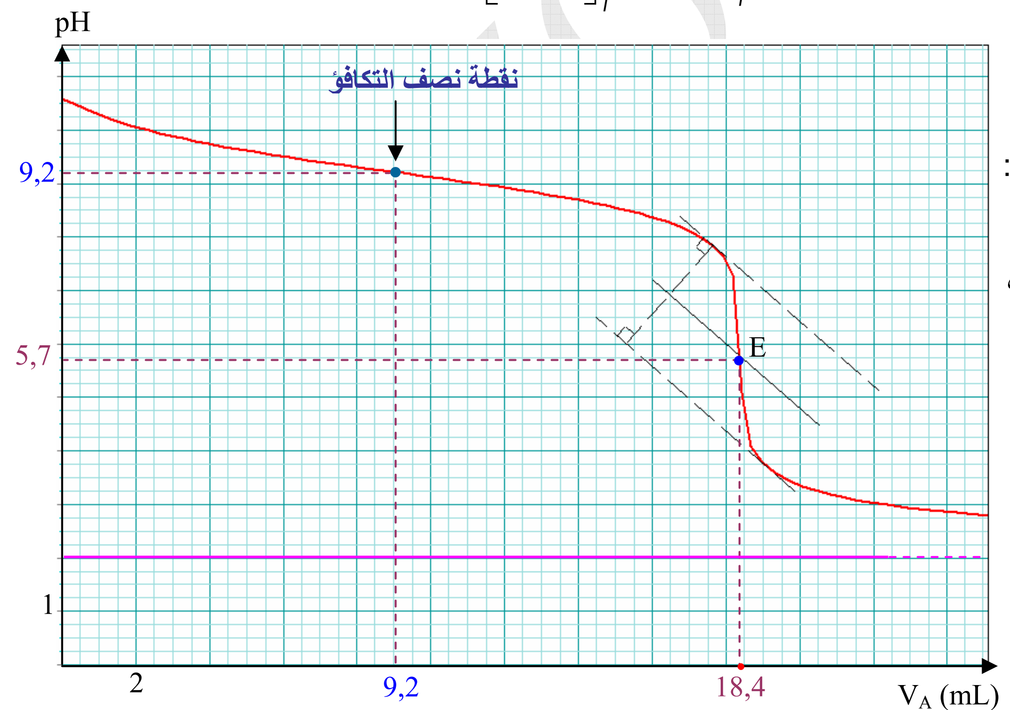
GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 31

1 – معادلة تفاعل المعايرة : $NH_{3(aq)} + (H_3O^+ , Cl^-)_{(aq)} \rightarrow (NH_4^+ , Cl^-)_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

أو اختصارا $NH_{3(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \rightarrow NH_4^+_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ (شاردة Cl^- غير فعالة في الماء)

2 – ثابت التوازن $$K = \frac{[NH_4^+]_f}{[H_3O^+]_f \times [NH_3]_f} = \frac{1}{K_A} = \frac{1}{10^{-9{,}2}} = 10^{9{,}2} = 1{,}6\times10^{9}$$



3 – نقطة التكافؤ (انظر للشكل)

4 - الأنواع الكيميائية التي تشكل أغلبية :

• **pH = 2**

نعلم أن التركيز المولي للمحلول الحمضي هو $C_A = 0{,}01\ mol/L$ ، وبالتالي $pH = -\text{Log}\ C_A = 2$

البيان $pH = f(V_B)$ يقبل المستقيم $pH = 2$ خطا مقاربا .

ما معنى هذا ؟

معناه أننا لكي نحصل على $pH = 2$ للمزيج يجب أن نواصل في إضافة المحلول الحمضي من السحاحة بعد نقطة التكافؤ إلى أن يصبح حجم المزيج يساوي تقريبا حجم المحلول الحمضي ، أي أن حجم المحلول الأساسي الذي كان موجودا في البيشر يصبح مهملا أمام حجم المزيج ، وكأن المزيج هو نفسه الحمض ، وبالتالي يكون لهذا المزيج قيمة لـ pH قريبة جدا من 2 .

الأنواع الكيميائية التي تشكل الأغلبية هي H_3O^+ ، Cl^-

• **pH = 5,2** (أغلب الظن أن التمرين يقصد $pH = 5,7$ ، أي نقطة التكافؤ) ، نعتبر $pH = 5,7$.

الفرق بين القيمتين لا يؤثر كثيرا ، ما دامت القيمتان تجاوران نقطة التكافؤ .

الأنواع الكيميائية الموجودة عند نقطة التكافؤ هي : H_3O^+ ، OH^- ، NH_4^+ ، Cl^- ، NH_3 .

$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-5,7} = 2,0 \times 10^{-6}\ mol/L$

$$\left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{\left[H_3O^+\right]} = \frac{10^{-14}}{2\times 10^{-6}} = 5,0\times 10^{-9}\ mol/L$$

$$\left[Cl^-\right] = \frac{C_A\ V_{A_E}}{V_B + V_{A_E}} = \frac{0,01\times 18,4}{38,4} = 4,8\times 10^{-3}\ mol/L$$

حسب قانون انحفاظ الشحنة في المحلول : $[NH_4^+] + [H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-]$ (1)

وبإهمال $[OH^-]$ لأنه فائق القلة ، وكذلك $[H_3O^+]$ لأنه صغير أمام $[Cl^-]$ ، ومنه $[NH_4^+] \approx [Cl^-] = 4,8 \times 10^{-3}\ mol/L$

حسب قانون انحفاظ مادة النشادر في المحلول : $\left[NH_3\right] = \frac{C_B\ V_B}{V_B + V_{A_E}} - \left[NH_4^+\right]$ (2)

النسبة $\frac{C_B\ V_B}{V_B + V_{A_E}}$ هي التركيز المولي للأساس بعدما تمدّد في المزيج ، أي بعد إضافة 18,4 mL من الحلول الحمضي)

نستخرج $[NH_4^+]$ من العلاقة (1) : $[NH_4^+] = [Cl^-] - [H_3O^+]$ (3)

(لا نهمل هذه المرة $[H_3O^+]$ لأن كمية مادة النوع المعايَر تكون قليلة بجوار نقطة التكافؤ ، في حالة الحموض والأسس الضعيفة)

نعوّض عبارة $[NH_4^+]$ من العلاقة (3) في العلاقة (2) ، مع العلم أن $\frac{C_B\ V_B}{V_B + V_{A_E}} = \frac{C_A\ V_{A_E}}{V_B + V_{A_E}}$ (التكافؤ)

وبالتالي نجد : $[NH_3] = [Cl^-] - ([Cl^-] - [H_3O^+]) = [H_3O^+] = 2,0 \times 10^{-6}\ mol/L$

إذن عند نقطة التكافؤ تكون الشاردتان Cl^- و NH_4^+ هما المتغلبتان .

• **pH = 9,2** (نقطة نصف التكافؤ) لأن pK_A الثنـائية NH_4^+ / NH_3 هو 9,2

عند نقطة نصف التكافؤ يكون $[NH_3] = [NH_4^+]$

لدينا : $[H_3O^+] = 10^{-9,2} = 6,3 \times 10^{-10}\ mol/L$ ، $\left[OH^-\right] = \frac{10^{-14}}{6,3\times 10^{-10}} = 1,6\times 10^{-5}\ mol/L$

$\left[Cl^-\right] = \frac{C_a\ V'}{V_b + V'} = \frac{0,01\times 9,2}{29,2} = 3,15\times 10^{-3}\ mol/L$ ، حيث V' هو حجم الحمض المضاف عند نصف التكافؤ .

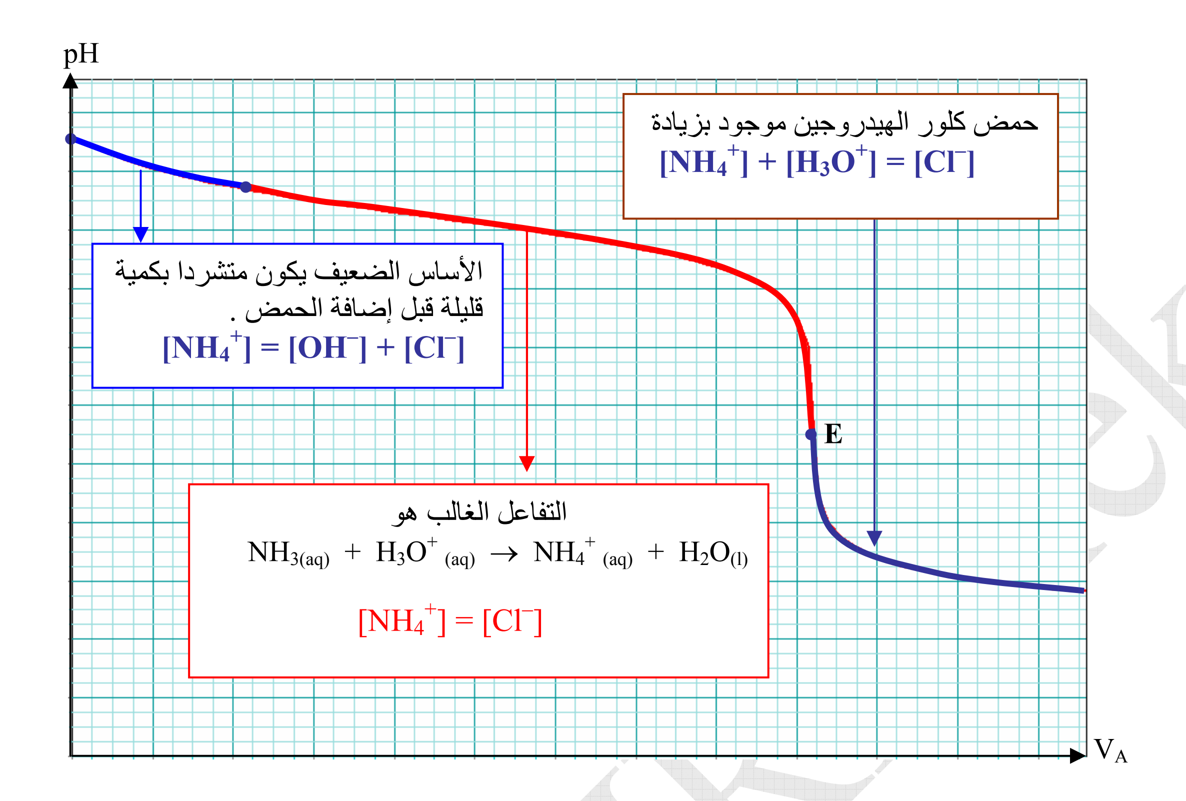
حسب قانون انحفاظ الشحنة في المحلول : $[NH_4^+] + [H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-]$ ، وبإهمال $[H_3O^+]$ و $[OH^-]$ نكتب

$[NH_4^+] \approx [Cl^-] = 3,15 \times 10^{-3}\ mol/L$

الأنواع الكيميائية التي تشكل أغلبية عند نصف التكافؤ هي : Cl^- ، NH_4^+ ، NH_3 .

ملاحظة : بإمكانك الإجابة عن هذا السؤال بدون حساب وذلك بالاستعانة بالخلاصة التالية :

خلاصة عـامة (بإمكانك الاستعانة بها في بيانات أخرى)



التمرين 32

حمض السولفاميك هو حمض قوي ، يتشرد كليا في الماء صيغته المفصلة

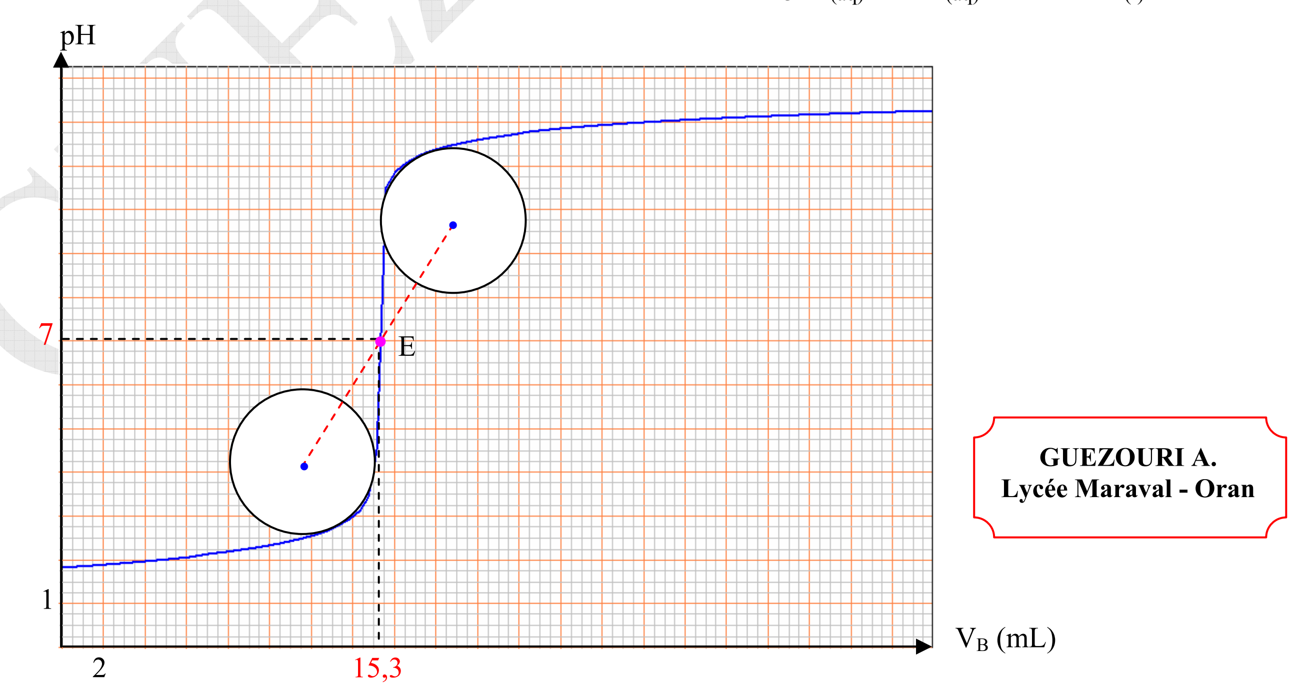
كتلته الجزيئية المولية 97 g/ mol .

1 - معادلة تفاعل الحمض مع المـاء :

نمثل الحمض بالرمز HA ، $HA_{(l)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + A^-_{(aq)}$

2 - أ) $(H_3O^+, A^-)_{(aq)} + (Na^+ , OH^-)_{(aq)} \rightarrow 2\, H_2O_{(l)} + (Na^+ , A^-)_{(aq)}$

أو اختصارا : $H_3O^+_{(aq)} \;\; OH^-_{(aq)} \rightarrow 2\, H_2O_{(l)}$



ب) نقطة التكافؤ E (15,3 mL , 7)

جـ) $C_A\ V_A = C_B\ V_{B_E}$

حجم المحلول الحمضي الذي عايرناه هو $V_A = 20 + 80 = 100$ mL (أضفنا الماء المقطر للمحلول الحمضي قبل الشروع في إضافة المحلول الأساسي) .

$$C_A = \frac{C_B\ V_{B_E}}{V_A}$$

$$C_A = \frac{0{,}1 \times 15{,}3}{100} = 1{,}53 \times 10^{-2}\ mol/L$$

لقد مددنا المحلول قبل معايرته بـ 5 مرات ، أي ضاعفنا حجمه بـ 5 مرات (كان الحجم 20 mL وأصبح 100 mL)

إذن تركيز المحلول S هو $C'_A = 5\ C_A = 5 \times 1{,}53 \times 10^{-2} = 7{,}65 \times 10^{-2}$ mol/L

عدد مولات الحمض في المحلول S هي $n = C'_A \times V = 7{,}65 \times 10^{-2} \times 0{,}2 = 1{,}53 \times 10^{-2}$ mol

كتلة الحمض في المحلول S هي $m = n \times M = 1{,}53 \times 10^{-2} \times 97 = 1{,}48$ g

د) نسبة النقاوة في الحمض هي $p = \frac{1{,}48}{1{,}8} = 0{,}82$ ، $p = 82\ \%$

هـ) الكاشف الملوّن الأنسب لهذه المعايرة هو أزرق البروموتيمول لأن مجال تغيّر لونه يشمل نقطة التكافؤ .

مجال تغير لون أزرق البروموتيمول هو 6,0 – 7,6 (ليس 4,4 – 6,0)

التمرين 33

1 – النسبة المئوية الكتلية لهيدروكسيد الصوديوم 20 % معناه : 100 g من هذا المحلول لا يحتوي إلا على 20 g من NaOH

هذه الـ 100 g من المحلول غير النقي تشغل حجما معيّنا لأن هذه المادة سائلة . هذا الحجم نحسبه بقانون الكتلة الحجمية $V = \frac{m}{\rho}$

$V = \frac{100}{1230} = 0{,}081 L$ ، ولدينا عدد مولات هيدروكسيد الصوديوم هو $n = \frac{m}{M} = \frac{20}{40} = 0{,}5\ mol$.

أما التركيز المولي فهو $[NaOH] = C'_B = \frac{n}{V} = \frac{0{,}5}{0{,}081} = 6{,}2\ mol/L$.

2 - **السؤال غير الموجود هو : اذكر الطريقة المتبعة والأدوات المستعملة**

نضيف كلمة (نمدّد) في أول الجملة في السؤال 2

الطريقة هي : نأخذ بواسطة مصاصة حجما $V' = 10$ mL مثلا ونصبه في حوجلة سعتها 1000 mL ونكمل الحجم بالماء المقطر

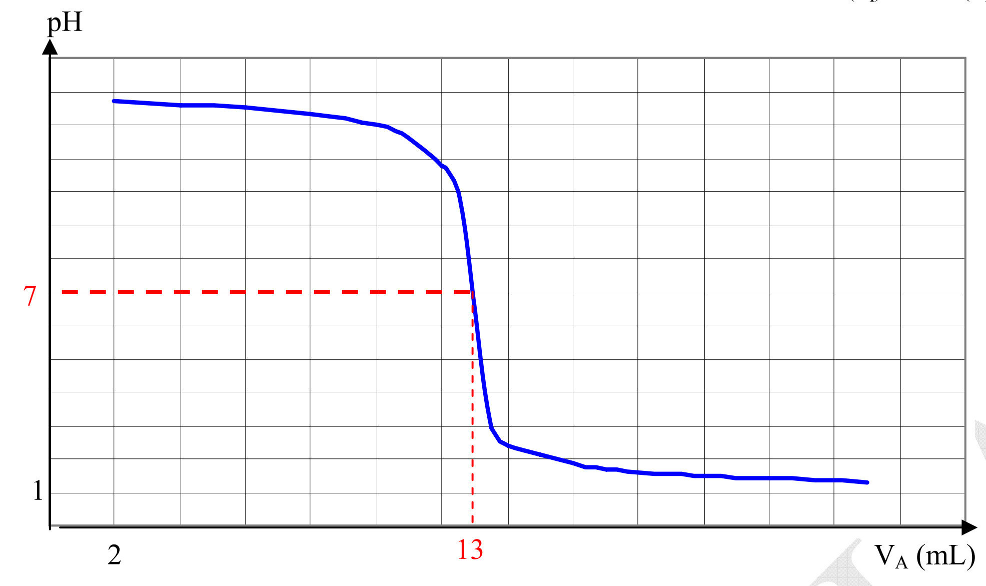
ونكون بذلك قد ضاعفنا الحجم 100 مرة ، أي $\frac{1000}{10}$. في هذه الحالة يصبح التركيز المولي للمحلول S هو :

$$C_B = \frac{6{,}2}{100} = 6{,}2 \times 10^{-2}\ mol/L$$

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

3 - أ) معادلة تفاعل المعايرة : $(H_3O^+, Cl^-)_{(aq)} + (Na^+, OH^-)_{(aq)} \rightarrow 2\,H_2O_{(l)} + (Na^+, Cl^-)_{(aq)}$

أو اختصارا : $H_3O^+_{(aq)}\ \ OH^-_{(aq)} \rightarrow 2\,H_2O_{(l)}$



ب) البيان $pH = f(V_A)$

جـ) إحداثي نقطة التكافؤ

E (13 mL , 7)

د) التركيز المولي للمحلول S هو C'B ، حيث $C'_B = \dfrac{C_A\ V_{A_E}}{V_B} = \dfrac{0{,}1 \times 13}{20} = 0{,}065\ mol/L$

أما التركيز المولي للمحلول المركز فيُضرب بـ 100 ويصبح $C''_B = 6{,}5$ mol/L .

هـ) المقارنة : تقتضي منا المقارنة أن نحسب الإرتياب النسبي في التركيز المولي

$\dfrac{\Delta C_B}{C_B} = \dfrac{|C'_B - C''_B|}{C'_B} = \dfrac{|6{,}2 - 6{,}5|}{6{,}2} = 0{,}05$ ، أي أن الدقة في هذه العملية كانت حوالي 5 %

GUEZOURI A.
Lycée Maraval - Oran

التمرين 01

1 – السرعة المتوسطة هي تغير شعاع الموضع في مدة زمنية ، وتغيّر شعاع الموضع هو شعاع الانتقال .

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\left(4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}\right) - \left(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right)}{2} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$$

، **تصحيح :** $\vec{r}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ (الطبعة الأولى)

طويلة السرعة المتوسطة : $v_{moy} = \sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2 + (-1)^2} = 1,22\ m/s$

2 - شعاع التسارع المتوسط : $\vec{a}_{moy} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t}$

$-7\vec{i} + 2\vec{j} = \dfrac{\left(5\vec{i} + 2\vec{k}\right) - \vec{v}_0}{5}$ ، ومنه $\vec{v}_0 = 40\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}$

التمرين 02

: حركة مستحيلة ... لا يمكن أن نحقق طورين متتابعين لحركتين منتظمتين .

التمرين 03

1 – تتزايد السرعة من اللحظة 0 حتى اللحظة 40 s ثم بعد ذلك تصبح ثابتة .

2 - نعلم أن التسارع يكون ثابتا إذا كانت السرعة دالة من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن .

نلاحظ على البيان أن في المجال الزمني [0 , 5 s] يكون مخطط السرعة عبارة عن خط مستقيم (أي من O إلى A) . إذن في هذا المجال الزمني يكون تسارع السيارة ثابتا ، وبالتالي تكون حركة السيارة في هذا المجال متسارعة بانتظام .

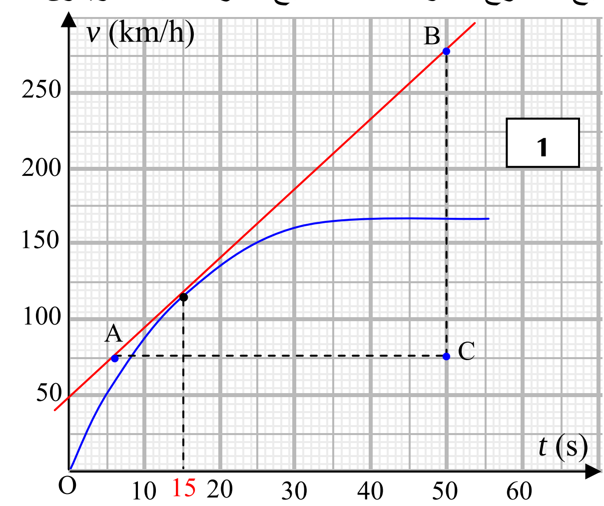
نختار دائما محورا موجها في جهة الحركة لكي نقول أن $v > 0$.

بما أن ميل المستقيم OA هو تسارع السيارة وهو موجب ، إذن $a > 0$ ، وهو نفسه a_t ، وبالتالي يكون لدينا :

$v \cdot a_t > 0$

3 - يصبح التسارع معدوما عندما تصبح السرعة ثابتة ، ويكون هذا بعد اللحظة 40 s ، وتكون حركة السيارة منتظمة .

4 -



التسارع في اللحظة t هو ميل المماس لمخطط السرعة في تلك اللحظة .

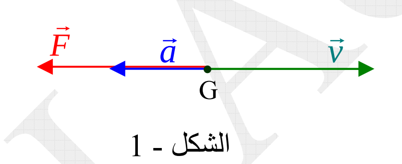
في اللحظة $t = 15$ s :

$$a_{15} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{205}{3,6}}{44} = 1,3\ m/s^2$$ (حوّلنا السرعة من km/h إلى m/s بتقسيمها على 3,6)

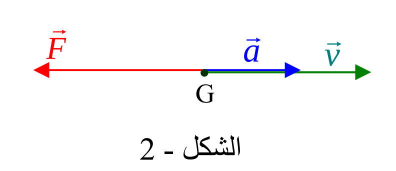
في اللحظة $t = 20$ s :

$$a_{20} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{150}{3,6}}{40} = 1,04 m/s^2$$

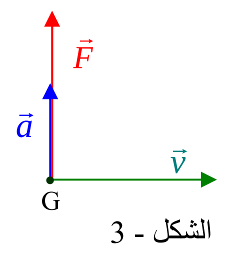
التمرين 04



الشكل - 1



الشكل - 2



الشكل - 3

الشكل – 1 :

حركة مستقيمة : لأن التسارع الناظمي معدوم .

حركة متباطئة بانتظام : $\vec{v} \times \vec{a} < 0$

$\vec{v} \times \vec{a} = v \times a\ cos(\vec{v}, \vec{a})$ ، ولدينا الزاوية بين الشعاعين 180° ، وبالتالي $cos 180 = -1$ ، إذن الجداء سالب)

الشكل – 2 : وضعية مستحيلة .

حسب القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = m\ \vec{a}$ ، وبما أن $m > 0$ ، إذن يجب أن يكون $\vec{F}$ و $\vec{a}$ في نفس الجهة .

الشكل – 3 :

بما أن $\vec{a} \perp \vec{v}$ ، إذن التسارع المماسي معدوم ، وبالتالي الحركة دائرية منتظمة .

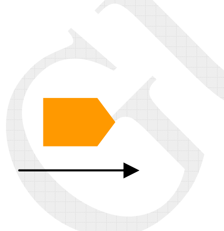
التمرين 5

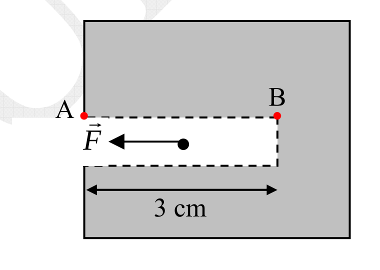
حسب القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = m\ \vec{a}$ ، حيث $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ، وبالتالي : $-\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} + \vec{F}_2 = 2(4\vec{i} - 3\vec{j})$ ومنه



$$\vec{F}_2 = 9\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

التمرين 06





نعتبر الرصاصة نقطة مادية .

لما وصلت الرصاصة إلى النقطة A كانت سرعتها v_A ، ولما وصلت إلى النقطة B انعدمت سرعتها لأنها توقفت .

نعتبر القوة المعرقلة لحركة الرصاصة محصورة في قوة واحدة $\vec{F}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F} = m\vec{a}$ ، وبالإسقاط على المحور الأفقي الموجّه في جهة الحركة :

$$-F = ma \qquad (1)$$

بما أن القوة ثابتة إذن الحركة متغيّرة بانتظام . نطبق العلاقة $v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ لحساب التسارع

$$a = \frac{0 - (400)^2}{2 \times 0,03} = -2,7 \times 10^6\ m.s^{-2}$$

بالتعويض في العلاقة (1) : $F = -0{,}01 \times (-2{,}7 \times 10^6) = 2{,}7 \times 10^4\ N$

المقارنة : $\dfrac{F}{P} = \dfrac{2{,}7 \times 10^4}{60 \times 10} = 45$ ، هذه القوة تكافيء وزن 45 شخص (قسم مكتظ من التلاميذ !!)

التمرين 07

1 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الطائرة :

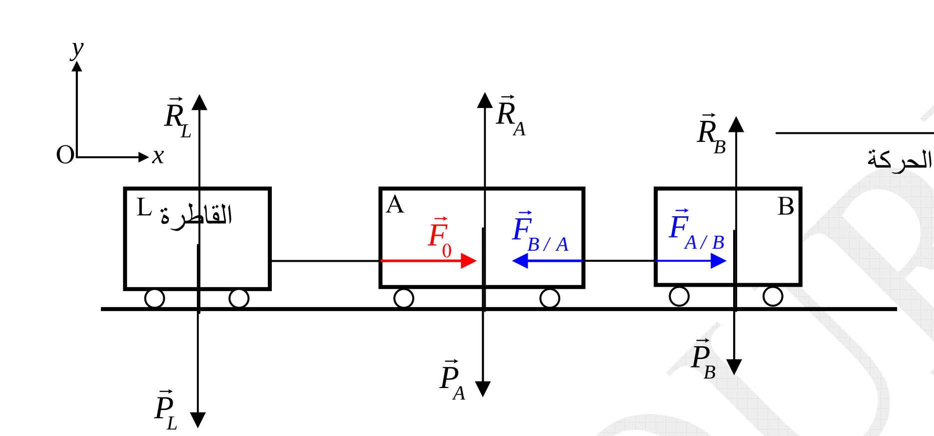
$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{S/A} = M\ \vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموضح في الشكل

$F = Ma$. تطبيق عددي : $a = \dfrac{8{,}8 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 2{,}93\ m/s^2$

2 - بما أن الحركة متغيرة بانتظام (التسارع ثابت) يمكن تطبيق العلاقة $v_2 - v_1 = at$ ، مع العلم أن $v_1 = 0$

$v_2 = 2{,}93 \times 10 = 29{,}3\ m/s$

التمرين 08



بإهمال الاحتكاك ،

1 – نطبّق نظرية مركز العطالة على العربة A :

$\vec{F}_0 + \vec{F}_{B/A} + \vec{P}_A + \vec{R}_A = m_A \vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور Ox :

$F_0 - F_{B/A} = m_A a \quad (1)$

نطبق النظرية على العربة B : $\vec{F}_{A/B} + \vec{P}_B + \vec{R}_B = m_B\ \vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور Ox :

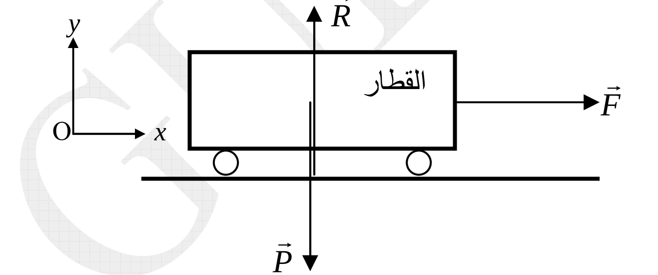
$F_{A/B} = m_B\ a \quad (1)$

القوّتان $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ فعلان متبادلان ، إذن مجموعهما معدوم (القانون الثالث لنيوتن) .

بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد $F_0 = (m_A + m_B)\, a = (1{,}2 + 0{,}8) \times 10^4 \times 2 = 4 \times 10^4\ N$

2 - القوة الأفقية المطبّقة على القاطرة من طرف السكة الحديدية مقصود بها قوة المحرك الموجود في القاطرة المطبّقة على القطار .

بتطبيق نظرية مركز العطالة على القطار باعتباره نقطة مادية :



$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = (m_A + m_B + m_L)\,\vec{a}$

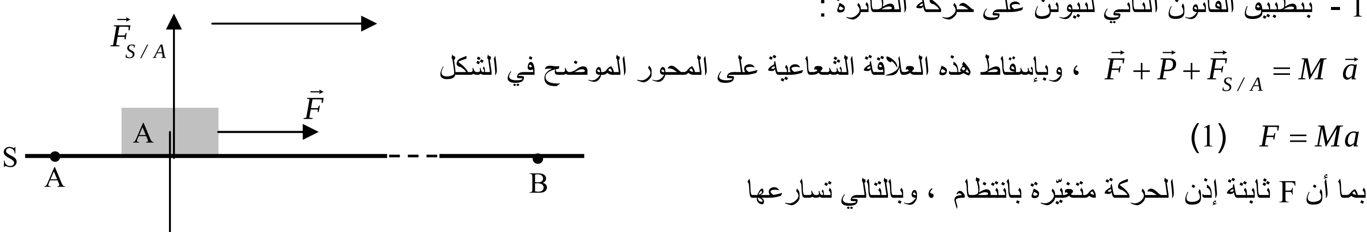
بإسقاط العلاقة على المحور Ox : $F = (m_A + m_B + m_L)\, a$

$F = (0{,}12 + 0{,}08 + 1) \times 10^5 \times 2 = 2{,}4 \times 10^5\ N$

التمرين 09

1 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الطائرة :

$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{S/A} = M\ \vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموضح في الشكل

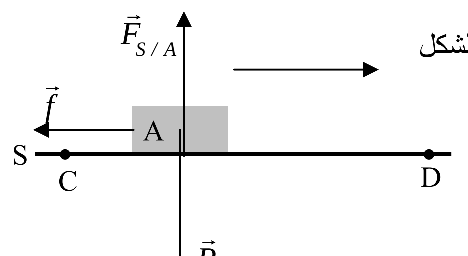


$F = Ma \quad (1)$

بما أن F ثابتة إذن الحركة متغيّرة بانتظام ، وبالتالي تسارعها

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_{AB}} = \frac{\frac{250}{3,6}}{2,2} = 31,5 \ m/s^2$$ ، وبالتعويض في (1) : $F = 12500 \times 31,5 = 3,93 \times 10^5 \text{ N}$

2 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الطائرة :



$\vec{f} + \vec{P} + \vec{F}_{S/A} = M \ \vec{a}'$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموضح في الشكل

$-f = Ma'$ (2)

بما أن f ثابتة إذن الحركة متغيّرة بانتظام ، وبالتالي تسارعها :

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2CD} = \frac{0 - \left(\frac{180}{3,6}\right)^2}{2 \times 40} = -31,2 \ m/s^2$$ ، وبالتعويض في (2) : $f = -12500 \times (-31,5) = 3,9 \times 10^5 \text{ N}$

التمرين 10

1 – **وصف الحركة :**

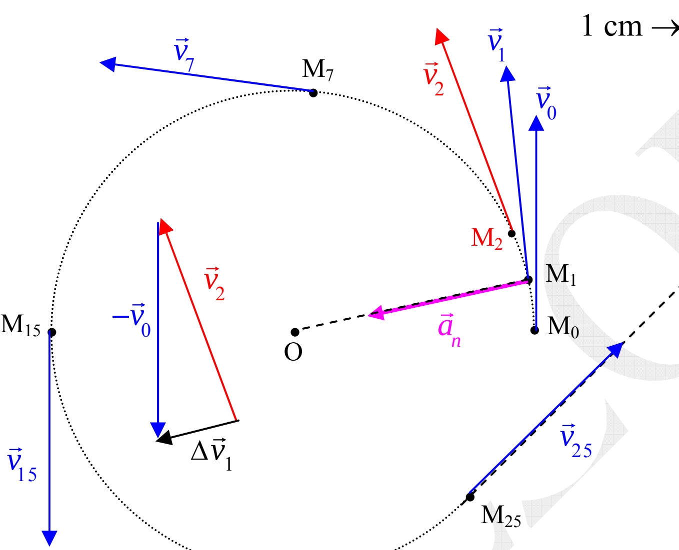
من النقطة M_0 إلى M_{25} الحركة دائرية منتظمة ، لأن : المسافات المقطوعة في مدَد زمنية متساوية (40 ms) هي متساوية .

من النقطة M_{25} إلى النقطة M_{35} الحركة مستقيمة منتظمة ، لأن : المسافات المقطوعة في مدَد زمنية متساوية هي متساوية .

2 – **تمثيل أشعة السرعة :**



3 – **التسارع المركزي (الناظمي) :**



التسارع المركزي يكون موازيا لشعاع تغيّر السرعة .

نحسبه مثلا في النقطة M_1 .

طويلة السرعة ثابتة في كل النقط ، فمثلا في النقطة M_1

$$v_1 = \frac{M_0M_2}{2\tau} = \frac{1 \times 5 \times 10^{-2}}{2 \times 40 \times 10^{-3}} = 0,62 \ m/s$$

$$a_n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(0,62)^2}{2,2 \times 5 \times 10^{-2}} = 3,5 \ m/s^2$$.

التمرين 11

1 – بما أن حركة الرجل منتظمة ، فالجزّارة كذلك تكون حركتها منتظمة .

بتطبيق نظرية مركز العطالة على الجزارة :

$\vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{F}_{T/C} = M \ \vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور Ox

$F \cos\alpha - f = 0$ (التسارع معدوم لأن السرعة ثابتة)

ومنه : $f = F \cos\alpha = 70 \times \cos 30 = 60,6 \ N$



2 - نحتفظ بنفس الشكل مع استبدال القوة $\vec{F}$ بقوّة أخرى $\vec{F}'$ ، ونطبّق نظرية مركز العطالة :

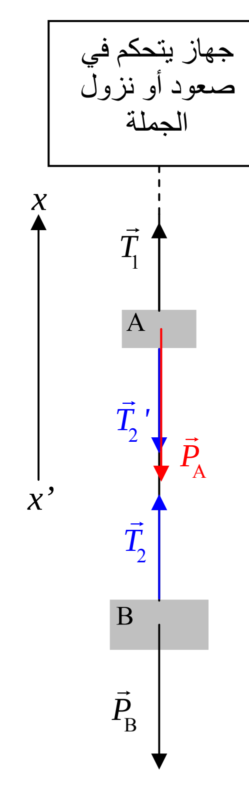
$\vec{F}' + \vec{f} + \vec{P} + \vec{F}_{T/C} = M \ \vec{a}'$ ، وبإسقاط العلاقة على المحور Ox :

$F' \cos\alpha - f = M \ a'$ ، ومنه $$F' = \frac{Ma' + f}{\cos\alpha} = \frac{20 \times 1 + 60,6}{0,86} = 93,7 \ N$$

التمرين 12

1 – الجسمان في راحة :

حساب T_1 : نختار الجملة $(A + B)$ ، حيث في هذه الحالة نتخلص من القوتين الداخليتين T'_2 و T_2 .



$\vec{T}_1 + \vec{P}_A + \vec{P}_B = 0$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور (اختياري) $x'x$:

$T_1 - P_A - P_B = 0$ ، ومنه $T_1 = P_A + P_B = (m_A + m_B)g = 0{,}5 \times 10 = 5\ N$

حساب T_2 : نختار الجملة B

$\vec{T}_2 + \vec{P}_B = 0$ ، وبإسقاط العلاقة على المحور $x'x$ ، نجد $T_2 = P_B = m_B g = 0{,}3 \times 10 = 3\ N$

2 – الجسمان يصعدان بسرعة قدرها 5 m/s :

السرعة ثابتة ، إذن التسارع معدوم . نفس الحل السابق .

3 – الجسمان يتسارعان إلى الأعلى بـ $2\ m/s^2$:

حساب T_1 : نختار الجملة $(A + B)$

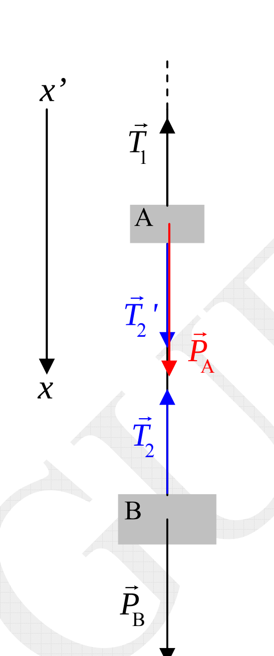
$\vec{T}_1 + \vec{P}_A + \vec{P}_B = (m_A + m_B)\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور $x'x$:

$T_1 - P_A - P_B = (m_A + m_B)a$ ، $T_1 = P_A + P_B + (m_A + m_B)a = 5 + 0{,}5 \times 2 = 6\ N \quad (1)$

حساب T_2 : نختار الجملة B

$\vec{T}_2 + \vec{P}_B = m_B\vec{a}$ ، وبإسقاط العلاقة على المحور $x'x$ ، نجد $T_2 - P_B = m_B a$ ، $T_2 = P_B + m_B a = 3 + 0{,}3 \times 2 = 3{,}6\ N$

4 - الجسمان يتسارعان إلى الأسفل بـ $2\ m/s^2$



حساب T_1 : نختار الجملة $(A + B)$

$\vec{T}_1 + \vec{P}_A + \vec{P}_B = (m_A + m_B)\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور $x'x$:

$P_A + P_B - T_1 = (m_A + m_B)a$ ، $T_1 = P_A + P_B - (m_A + m_B)a = 5 - 0{,}5 \times 2 = 4\ N$

حساب T_2 : نختار الجملة B

$\vec{T}_2 + \vec{P}_B = m_B\vec{a}$ ، وبإسقاط العلاقة على المحور $x'x$ ، نجد $P_B - T_2 = m_B a$ ،

$T_2 = P_B - m_B a = 3 - 0{,}3 \times 2 = 2{,}4\ N$

5 – التسارع الأقصى الممكن :

التوتر T_1 في كل الحالات أكبر من T_2 ، إذن فهو التوتر المقصود .

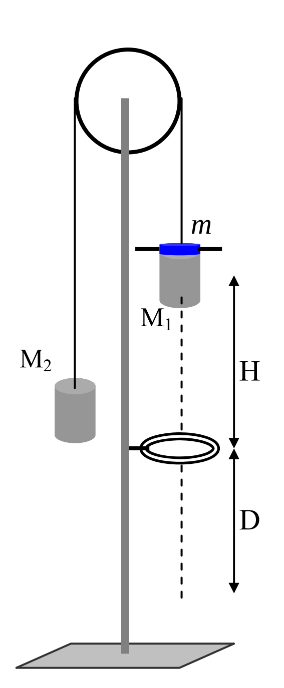
من العلاقة (1) ، علاقة T_1 في حالة الصعود نضع $T_1 \le 10\ N$:

$P_A + P_B + (m_A + m_B)a \le 10$ ، ومنه $a \le \dfrac{10 - (P_A + P_B)}{m_A + m_B}$ ، $a \le 10\ m/s^2$

التسارع الأقصى الممكن هو $a = 10\ m/s^2$. لو تجاوزت الجملة هذا التسارع ينقطع الخيطان ، حيث يتجاوز توتر الخيط العلوي القيمة 10 N والخيط السفلي يتجاوز القيمة 6 N .

التمرين 13

آلة أتود (Machine d'Atood) : عبارة عن بكرة خفيفة قابلة للدوران حول محورها الأفقي .



يمرُّ على محزّها خيط مهمل الكتلة ويحمل في طرفية أسطوانتين C_1 و C_2 كتلتاهما $M_1 = M_2 = M$ ، يمكنهما الحركة أمام مسطرة مدرّجة . هذه المسطرة ملصقة على حامل البكرة .

عندما تنزل الأسطوانة C_1 تمرّ داخل حلقة مثبّتة مع المسطرة (تسمى حلقة مُفرّغة) .

يمكن أن ندرس بواسطة آلة أتود طورين لحركة C_1 . من أجل هذا الغرض نضع فوقها جسما مجنّحا كتلته m ، بحيث لما تصل المجموعة (الجسم المجنّح و C_1) إلى الحلقة تمر C_1 ، أما الجسم المجنّح يبقى عالقا فوق الحلقة بسبب وجود الجناحين ، ولأن الخيط يمر عبر ثقب في مركز الجسم المجنّح .

لكي نجد علاقة رياضية فيها g ندرس حركة الجملة في طورها الأول ، أي أثناء الانتقال H .

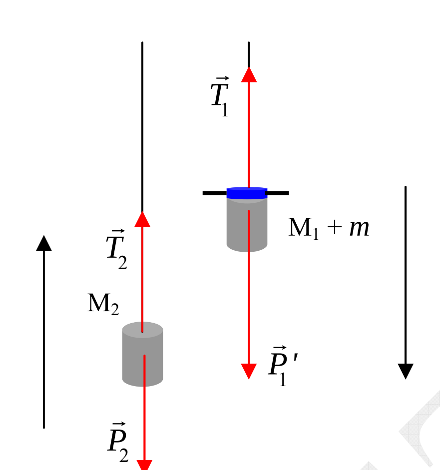
تبدأ الجملة حركتها من السكون .

جهة الحركة واضحة ، أي في جهة C_1 . نفصّل الجملة لكي يتسنى لنا تمثيل القوى :

نطبّق نظرية مركز العطالة على الجزء $(M_1 + m)$:

$\vec{P}_1' + \vec{T}_1 = (M_1 + m)\vec{a}_1$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور الموجه في جهة الحركة :

$$P_1' - T_1 = (M_1 + m)a_1 \qquad (1)$$



نطبّق نظرية مركز العطالة على الجزء (M_2) :

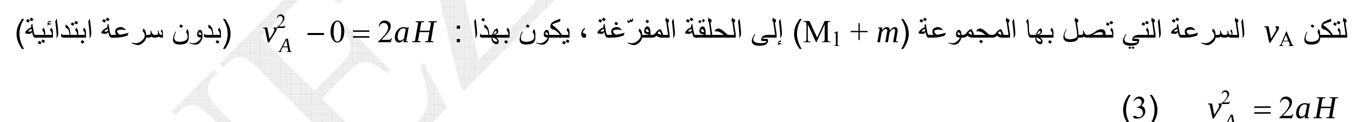
$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = M_2\vec{a}_2$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور الموجه في جهة الحركة :

$$T_2 - P_2 = M_2 a_2 \qquad (2)$$

الجملة مترابطة ، وبالتالي $a_1 = a_2 = a$. البكرة خفيفة بالنسبة للأجسام الأخرى ، إذن

$T_1 = T_2$. بجمع العلاقتين (1) و (2) نجد $g = \dfrac{2M + m}{m}a \qquad (2)$

العلاقة (2) تبيّن أن التسارع ثابت ، وبالتالي حركة الجملة متغيرة بانتظام .



لتكن v_A السرعة التي تصل بها المجموعة $(M_1 + m)$ إلى الحلقة المفرّغة ، يكون بهذا : $v_A^2 - 0 = 2aH$ (بدون سرعة ابتدائية)

$$v_A^2 = 2aH \qquad (3)$$

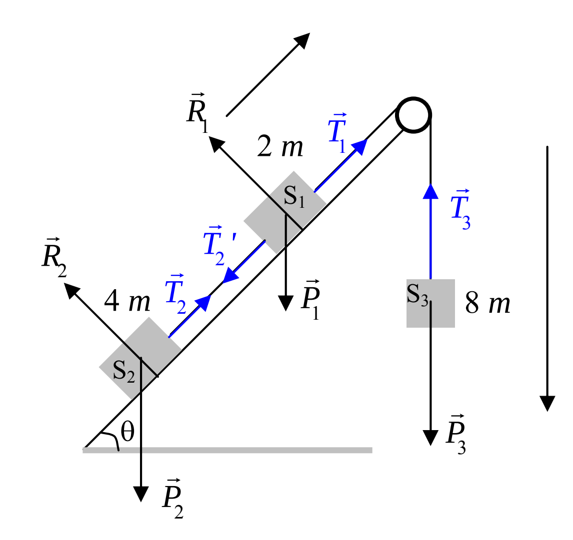
من العلاقة (2) نستخرج $a = \dfrac{m}{2M + m}g$ ، و بعد الحلقة المفرّغة يصبح $a = 0$ (m لا تمرّ ، فعوضناها بالصفر)

ومن هذا نستنتج أن الحركة تصبح منتظمة بعد الحلقة المفرغة ، وبالتالي $D = v_A\, t \qquad (4)$

من العلاقتين (3) و (4) نستنتج $\dfrac{D^2}{t^2} = 2aH$ ، ومنه $a = \dfrac{D^2}{2Ht^2}$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) نجد المطلوب :

$$g = \frac{(2M + m)D^2}{2mHt^2}$$

التمرين 14



1 – نعيّن جهة الحركة ، ثم ندرس الحركة ونستنتج عبارة التسارع .

تصحيح : المقصود m (ليس M)

تعيين جهة الحركة :

نقارن بين $P_3 = 8\,mg$ و $(P_1 + P_2)\sin\theta = 6mg\ \sin\theta$

بما أن $\sin\theta \le 1$ ، إذن $8 > 6\sin\theta$. إذن جهة الحركة هي جهة S_3 .

نطبق نظرية مركز العطالة على الجسم S_3 : تسارعه a_3

$\vec{P}_3 + \vec{T}_3 = 8m\ \vec{a}_3$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموجه في جهة الحركة :

$$P_3 - T_3 = 8m\ a_3 \qquad (1)$$

نطبق نظرية مركز العطالة على الجملة $(S_1 + S_2)$: تسارعها a'_1

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 6m\ \vec{a}'_1$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموجه في جهة الحركة :

$$T_1 - P_1\sin\theta - P_2\sin\theta = 6m\ a'_1 \qquad (2)$$

$T_1 = T_3$ و $a_3 = a'_1 = a$

بجمع العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد : $a = \dfrac{P_3 - (P_1 + P_2)\sin\theta}{14m} = \dfrac{g(4 - 3\sin\theta)}{7}$

$$a = \frac{g}{7}(4 - 3\sin\theta) = \frac{10}{7}\left(4 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2{,}7\ m/s^2$$

2 - الفرق $T_1 - T_2$ هو نفس الفرق $T_1 - T'_2$ ، لأن $T_2 = T'_2$.

من أجل إيجاد هذا الفرق نطبق نظرية مركز العطالة على الجسم S_1 ونسقط مباشرة على المحور السابق :

$T_1 - T'_2 - P_1\sin\theta = 2m\ a$ ، ومنه $T_1 - T_2 = P_1\sin\theta + 2m\ a = 20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\times 2{,}7 = 19{,}5\ N$

التمرين 15

السرعة : $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ ، $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ ، $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r}$ ، حيث M : كتلة الكوكب الجاذب ، m كتلة القمر الصناعي ، G : الثابت الكوني . (ارجع للدرس)

التمرين 16

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

التمرين 17

المسافة $r_A = 7330$ km هي المسافة بين مركز الأرض وأبعد نقطة من مدار القمر الصناعي .

المسافة $r_p = 6610$ km هي المسافة بين مركز الأرض وأقرب نقطة من مدار القمر الصناعي .

الدور : $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$ (1)

حيث $a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{7330 + 6610}{2} = 6970\ km$

يمكن حساب الدور بهذه العلاقة ، ويمكن أن نجد عبارة أخرى للدور كما يلي :

على سطح الأرض تكون قوّة التجاذب بين القمر الصناعي والأرض $F = G\frac{mM_T}{R_T^2}$ ، حيث أن F هي قوة ثقل القمر الصناعي على سطح الأرض ، ومنه : $F = m\,g_0$ ، حيث g_0 هو تسارع الجاذبية الأرضية على سطح الأرض .

بالتعويض نجد : $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ ، ومنه : $GM_T = g_0 R_T^2$. وبالتعويض في العلاقة (1) نجد $T = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{a^3}{g_0}}$

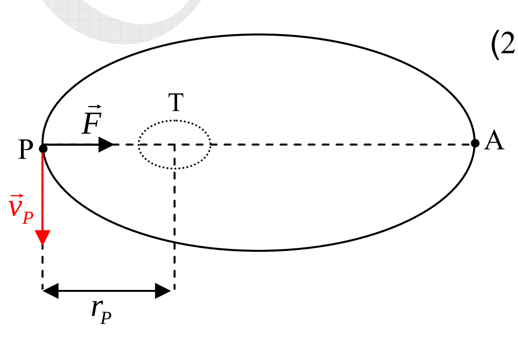
تطبيق عددي : $T = \frac{6,28}{64\times10^5}\sqrt{\frac{(6970\times10^3)^3}{9,81}} = 96,1\ mn$

السرعة في أدنى نقطة من المدار :

في النقطة P تكون قوّة التجاذب بين القمر الصناعي والأرض : $F = G\frac{mM}{r_P^2}$ (2)

وحسب القانون الثاني لنيوتن ، فإن هذه القوة هي $F = m\frac{v_P^2}{r_P}$ (3)

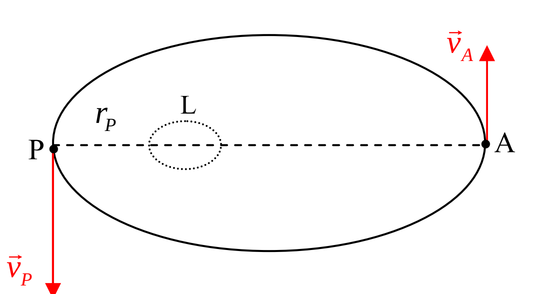
بالمساواة بين (2) و (3) $v_P = \sqrt{\frac{GM}{r_P}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r_P}}$.



تطبيق عددي : $v_P = 64\times10^5\sqrt{\dfrac{9,81}{6610\times10^3}}$ ، $v_P = 28\times10^3\ km/h$



التمرين 18



نصف قطر القمر $R_L = 1728$ km

$r_P = R_L + 100 = 1728 + 100 = 1828$ km

$r_A = R_L + 125 = 1728 + 125 = 1853$ km

1 – السرعة العظمى : $v_P = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_P}} = R_L\sqrt{\dfrac{g_{0,L}}{r_P}} = 1728\times10^3\sqrt{\dfrac{1,63}{1828\times10^3}} = 5874\ km/h$

– السرعة الصغرى : $v_A = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_A}} = R_L\sqrt{\dfrac{g_{0,L}}{r_A}} = 1728\times10^3\sqrt{\dfrac{1,63}{1853\times10^3}} = 5834\ km/h$

2 – الدور : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM_L}}$ ، ولدينا $a = R_L + \dfrac{h_A + h_P}{2} = 1840,5\ km$ ، $GM_L = R_L^2\, g_{0,L}$. $g_{0,L}$: تسارع الجاذبية

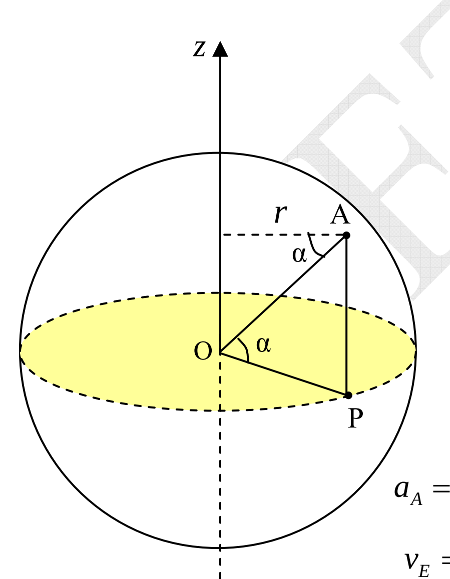
على سطح القمر $g_{0,L} = \dfrac{9,81}{6} = 1,63\ m.s^{-2}$ ، ومنه :

$T = \dfrac{2\pi}{R_L}\sqrt{\dfrac{a^3}{g_{0,L}}} = \dfrac{6,28}{1728\times10^3}\sqrt{\dfrac{(1840,5\times10^3)^3}{1,63}}$ ، T = 118,5 mn

التمرين 19

1 - النقطة A تنتمي لسطح الأرض ، أي أن $OA = R_T$

النقطة A تدور حول المحور Oz صانعة دائرة نصف قطرها r ، حيث $r = R_T\cos\alpha$



تدور النقطة A بنفس السرعة الزاوية للأرض :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{23\times3600 + 56\times60 + 4} = \frac{6,28}{86164} = 7,28\times10^{-5}\,rd.s^{-1}$$

2 - أ) السرعة الخطية للنقطة A :

$$v_A = \omega\, r = \omega\, R_T\cos\alpha = 7,28\times10^{-5}\times6,4\times10^6\cos\alpha = 465,9\cos\alpha$$

تسارع النقطة A هو تسارع ناظمي لأن حركتها دائرية منتظمة .

$$a_A = a_n = \omega^2\, r = \omega^2 R_T\cos\alpha = \left(7,28\times10^{-5}\right)^2\times6,4\times10^6\cos\alpha = 3,39\times10^{-2}\cos\alpha$$

ب) عند خط الإستواء $\alpha = 0$ ، وبالتالي : $v_E = 465,9\cos0 = 465,9 m/s \approx 1677\ km/h$

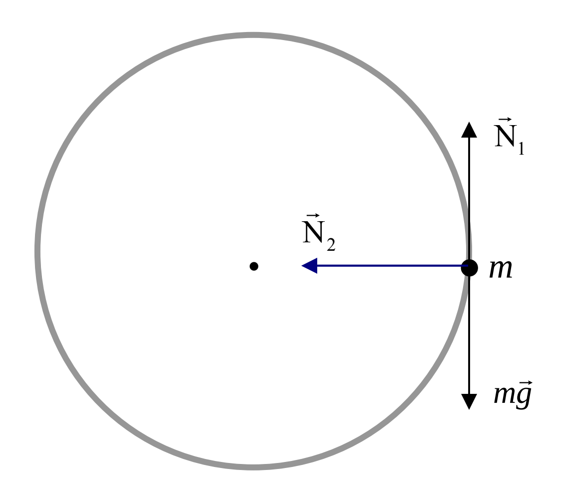
$a_E = 3,39\times10^{-2}\,rd/s^2$

جـ) عند أحد القطبين $r = 0$ ، وبالتالي $v_N = 0$ ، $a_N = 0$

د) عند خط الاستواء $\dfrac{g}{a_E} = \dfrac{9,8}{3,39\times10^{-2}} = 112$

التمرين 20

القوة $\vec{N}_2$ هي القوة التي يضغط بها مسند الكرسي على ظهر المرأة ، وهي القوة المكافئة لقوة الطرد المركزي التي تخضع لها المرأة



عندما تدور العجلة . $N_2 = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R$ (1)

لدينا $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi N$ ، حيث N هو التواتر $(N = \dfrac{1}{T})$

التواتر هو عدد الدورات في الثانية أي $N = \dfrac{5}{60}\ tr/s$ ، وبالتالي :

$$\omega = 2\pi\frac{5}{60} = 0,52\ rd/s$$

بالتعويض في العلاقة (1) : $N_2 = 60\times(0,52)^2\times 8 \approx 130N$

القوة $\vec{N}_2$ هي القوة المكافئة لثقل المرأة ، ومنه $N_2 = P = m\,g = 60 \times 9,81 = 588,6$ N

محصلة هاتين القوتين : $F = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(588,6)^2 + (130)^2} = 602,8N$

التمرين 21

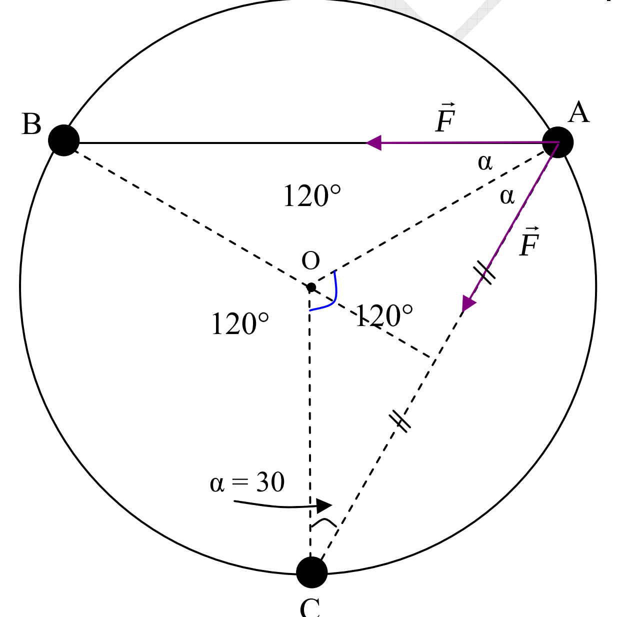
تصحيح (الطبعة الأولى) : العلاقة المعطاة في التمرين غير متجانسة : $\omega^2 = \dfrac{Gm}{\sqrt{3}\ r^2}$. نجري لهذه العلاقة تحليلا بعديا :

بالنسبة لـ ω^2 : لدينا $\omega^2 = \dfrac{v^2}{R^2} = \dfrac{[M]^2[T]^{-2}}{[M]^2} = [T]^{-2}$

بالنسبة لـ $\dfrac{Gm}{\sqrt{3}\ r^2}$: $\dfrac{[K][M][T]^{-2}[M]^2[K]^{-2}[K]}{[M]^2} = [M][T]^{-2}$ ، لأن وحدة G : $N\ m^2 kg^{-2}$ ، ولكن النيوتن ليس من وحدات الجملة الدولية ، نعوّضه بـ $kg\ m\ s^{-2}$ ، لأن $F = m\,a$. جملة الوحدات الدولية هي MKSA (متر – كلغ – ثانية – أمبير) أضيفت لها ثلاثة وحدات أخرى (المول ، الكلفين ، والقنديل : وحدة الشدة الضوئية) ، ومنه عدم التجانس وبالتالي العلاقة خاطئة .

إيجاد العلاقة الصحيحة : كل نجم يخضع إلى قوتي تجاذب مع النجمين الآخرين .

نحسب المسافة بين كل نجمين ، فمثلا بين النجمين A و C



$$AC = 2r\cos\alpha = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

قوة التجاذب بين هذين النجمين هي : $F = G\dfrac{m^2}{\left(r\sqrt{3}\right)^2} = G\dfrac{m^2}{3\,r^2}$ (1)

بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى ، تكون محصلة القوتين $\vec{F}$:

$2F\cos 30 = m\dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ ، وبتعويض F من العبارة (1)

$2G\dfrac{m^2}{3\,r^2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = m\omega^2 r$ ، ومنه : $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{Gm}{r^3} = \dfrac{Gm}{\sqrt{3}\,r^3}$

التمرين 22

لدينا الكتلة الحجميّة للقمر $\rho = \frac{M_L}{V_L}$ ، دور القمر الصناعي : $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_L+h)^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R_L+h)^3}{4\pi G R_L^3\ \rho}}$

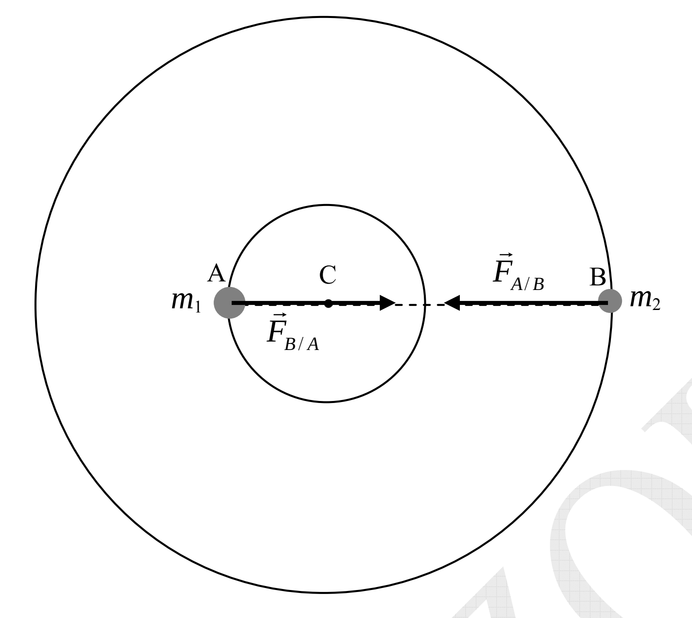
ومنه : $\rho = \frac{3\pi(R+h)^3}{GR^3.T^2} \approx 3334\ kg/m^3$

التمرين 23

1 – بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى والتأثير الثقالي يكون كل نجم خاضعا لقوة $F_{A/B} = F_{B/A}$

$\vec{F}_{B/A} = m_1\ \vec{a}'_n$ ، $\vec{F}_{A/B} = m_2\ \vec{a}_n$

2 - النجمان يدوران حول مركز كتلتيهما .



نحدّد أولا مركز الكتلة ، والمسمى كذلك مركز الثقل ، والمكافئ في الرياضيات لمركز الأبعاد المتناسبة (المرجح) .

يوجد مركز الكتلة على القطعة المستقيمة AB الواصلة بين مركزي النجمين .

نفرض أن مركز الكتلة يبعد على عن النقطة A بالمسافة x . إذن

$m_1\ x = m_2(r_1 + r_2 - x)$ (قانون مركز الكتلة)

ومنه : $x = \frac{m_2}{m_1+m_2}(r_1+r_2)$

قوة التجاذب بين النجمين هي : $F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}$

بالنسبة للنجم A مثلا : $G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_1\frac{v_1^2}{x} = \frac{m_1 v_1^2}{\frac{m_2}{m_1+m_2}(r_1+r_2)}$ (1)

من جهة أخرى لدينا $v_1^2 = \omega^2 x^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}(r_1+r_2)\right)^2$ (2)

بتعويض عبارة v_1^2 من العلاقة (2) في العلاقة (1) نجد : $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3$

3 – يمكن بواسطة الملاحظات والقياسات الفلكية أن نقيس r_1 ، r_2 ، T ، وبالتالي نستنتج مجموع كتلتي النجمين .

التمرين 24

حسب القانون الثالث لكبلر : $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$ ، ومنه $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{(238020)^3}{(377400)^3} = 0,25$ ، ومنه $\frac{T_1}{T_2} = 0,5$ ، أي $T_2 = 2\ T_1$

التمرين 25

1 - القوّة المؤثرة على القمر الصناعي هي قوّة تجاذبه مع الأرض ، وهي قوة متجهة نحو مركز الأرض ، إذن تسارعه متجه نحو مركز الأرض ، وبالتالي هو تسارع ناظمي ، إذن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

2 - قوّة الجذب بين القمر الصناعي والأرض $F = G\dfrac{mM_T}{(R+H)^2} = m\dfrac{v^2}{(R+H)}$ (1)

لدينا $v^2 = \omega^2 (R+H)^2 = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 (R+H)^2$. وبالتعويض في (1) : $\dfrac{4\pi^2}{T^2}(R+H)^2 = \dfrac{GM_T}{R+H}$ ، ومنه :

$\dfrac{(R+H)^3}{T^2} = \dfrac{GM_T}{4\pi^2} = Cst$ (Cst معناه ثابت) .

ثابت التناسب في القانون الثالث لكبلر هو $K = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$.

3 - أ) يتميز القمر ميتيوسات بدوره الذي يساوي الدور اليومي للأرض (86146 s) ، أي أنه يبقى دائما مستقرا فوق نقطة من سطح الأرض على خط الإستواء ، لأنه يدور شرقا ، أي في نفس جهة دوران الأرض .

ب) يسمى هذا النوع من الأقمار الصناعية الأقمار المستقرة أرضيا .

جـ) يمثّل الدور 23 h 56 mn 4 s دور الأرض اليومي أي الزمن اللازم لمرورين متعاقبين لنقطة من سطح الأرض مقابلا لنجم ثابت .

د) يمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول نفسها (الدور اليومي) ، ويمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول الشمس ، ثم نقسم هذا الزمن على عدد الدورات التي قامت بها الأرض حول نفسها أثناء دورانها حول الشمس ، فنجد أن هناك فرقا بين المدتين . نعلم أن الأرض تدور حول نفسها في نفس الجهة التي تدور فيها حول الشمس ، فأثناء هذا الدوران وخلال 365,25 يوم شمسي تنجز الأرض دورة زيادة بالنسبة للنجوم الثابتة وبالتالي يكون الدور اليومي $T = 86400 \times \dfrac{365,25}{366,25} = 86164s$

إذن ليس 24 h .

4 - **كوسموس** : $\dfrac{(R+H)^3}{T^2} = \dfrac{\left((6400+19100)\times 10^3\right)^3}{(40440)^2} \approx 10^{13}$

مير : $\dfrac{(R+H)^3}{T^2} = \dfrac{\left((6400+500)\times 10^3\right)^3}{(5700)^2} \approx 10^{13}$

ميتيوسات : $\dfrac{(R+H)^3}{T^2} = \dfrac{\left((6400+35800)\times 10^3\right)^3}{(86160)^2} \approx 10^{13}$

5 - $\dfrac{GM_T}{4\pi^2} = 10^{13}$ ، ومنه $M_T = \dfrac{4\pi^2 \times 10^{13}}{G} = \dfrac{40\times 10^{13}}{6,67\times 10^{-11}} = 6\times 10^{24}\,kg$

التمرين 26

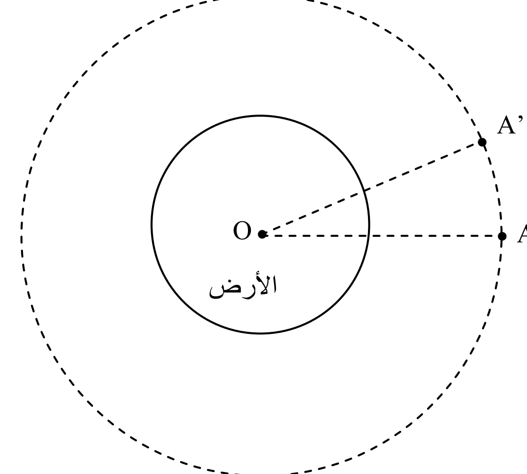
I -

1 - السرعة : $v_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+H}} = \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}{6800\times10^3}}$ ، $v_s = 27360\ km/h$

2 – الدور : $T_s = 2\pi\sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM_T}} = 6,28\sqrt{\frac{(68\times10^5)^3}{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}}$ ، $T_s = 92,7\ mn$

3 - بما أن القمر الصناعي يدور نحو الشرق ، فإنه يدور في نفس جهة دوران الأرض .

نعتبر النقطة A هي النقطة التي يمر بها القمر الصناعي في اللحظة t = 0 ، هذه النقطة واقعة على الشاقول المار بالنقطة A' من سطح الأرض على خط الإستواء .



عندما يصبح القمر الصناعي للمرة الأولى فوق النقطة A التي تكون قد انتقلت إلى الوضع A' يكون حينذاك القمر الصناعي قد أنجز دورة زيادة عن عدد دورات الأرض (الأرض أنجزت جزءا من الدورة والقمر الصناعي أنجز نفس الجزء زائد دورة ، إذن الفرق هو دورة)

ليكن t_1 هي المدة التي استغرقها القمر الصناعي حينذاك ، إذن :

$t_1 = (n+1)T_s$ (1)

وبالنسبة للأرض : $t_1 = nT$ (2)

حيث T هو دور الأرض حول نفسها . n : عدد الدورات

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج $n = \frac{T_s}{T-T_s}$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) مثلا ، نجد

$t_1 = T\frac{T_s}{T-T_s} = 1440\times\frac{92,7}{1440-92,7} = 99\ mn$ ، وهو المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين للقمر الصناعي فوق نفس النقطة .

II –

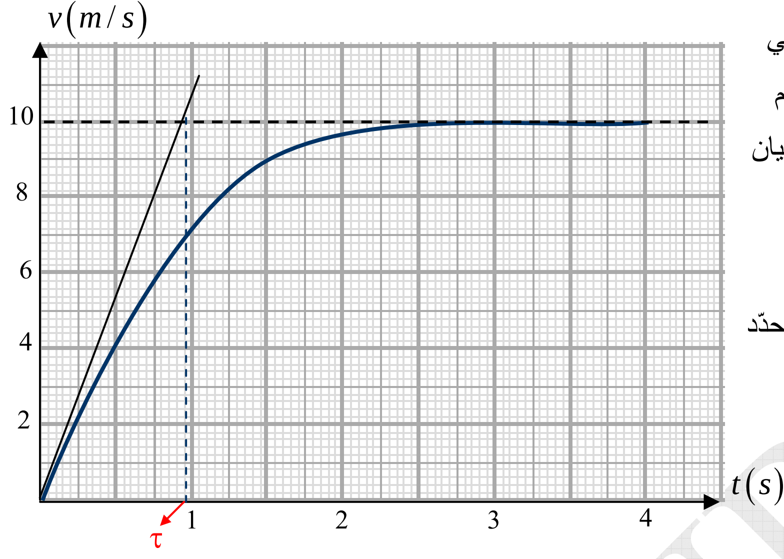
1 - في كل دورة ينقص ارتفاع القمر الصناعي عن الأرض بـ $\frac{1}{1000}$ من قيمة الارتفاع الذي قبله ، إذن بالنسبة للارتفاع $h_0 = 400\ km$ والارتفاع الذي يليه (أي بعد دورة واحدة) h_1 يمكن أن نكتب العلاقة من الآن $h_1 = h_0 - \frac{h_0}{1000}$.

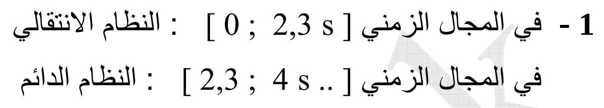
من العلاقة $h_1 = h_0\times\frac{999}{1000}$ ، نستنتج أن الارتفاعات عبارة عن حدود متتالية هندسية أساسها $1-\frac{1}{1000} = 0,999$ ، وحدها الأول $h_0 = 400\ km$ ، حيث $h_n = h_0\times\left(1-\frac{1}{1000}\right)^n$ و $h_{n+1} = h_n\times\left(1-\frac{1}{1000}\right)$ ، وهي العلاقة المطلوبة .

3 - لدينا $h_n = h_0\times\left(1-\frac{1}{1000}\right)^n$. نحسب قيمة n (عدد دورات القمر الصناعي) من أجل $h_n \approx 100\ km$

$100 = 400(0,999)^n$ ، ومنه $n = \frac{ln0,25}{ln0,999} \approx 1386$ ($h = 100$ km ليس حدا لهذه المتتالية ، لكنه قريب من أحد الحدود)

التمرين 27





1 - في المجال الزمني [0 ; 2,3 s] : النظام الانتقالي

في المجال الزمني [2,3 ; 4 s ..] : النظام الدائم

2 - أ) السرعة الحدّية : نرسم الخط المقارب الأفقي للبيان

فيقطع محور السرعة في القيمة 10 m/s ،

ومنه السرعة الحدّية هي $v_l = 10 m/s$

ب) الزمن المميّز : نرسم المماس للبيان في المبدأ ونحدّد فاصلة تقاطعه مع الخط المقارب .

من البيان τ = 0,95 s



التمرين 28

1 – ثقل الجسم : $P = mg$ (1)

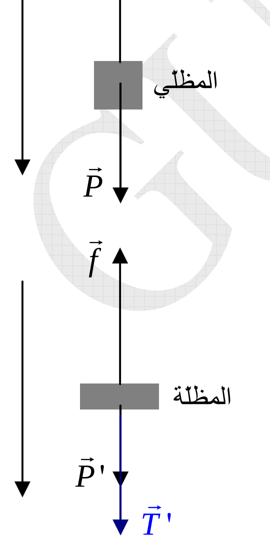
كتلة الجسم $m = \rho\ V = 8,9 \times 5 = 44,5 g$ ، وبالتعويض في (1) : $P = 44,5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 4,36 \times 10^{-1} N$

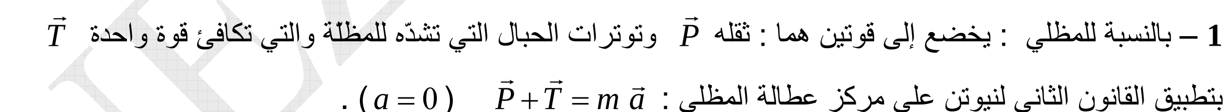
2 – دافعة أرخميدس في الماء هي ثقل الماء الذي أزاحه الجسم : $\Pi = \rho_{eau} Vg = 1 \times 5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 4,9 \times 10^{-2} N$

3 – دافعة أرخميدس في الهواء هي ثقل الهواء الذي أزاحه الجسم : $\Pi = \rho_{air} Vg = 1,3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-3} \times 9,81 = 6,37 \times 10^{-5} N$

التمرين 29

تتحرك الجملة بسرعة ثابتة ، إذن حركتها منتظمة .





1 – بالنسبة للمظلي : يخضع إلى قوتين هما : ثقله $\vec{P}$ وتوترات الحبال التي تشدّه للمظلة والتي تكافئ قوة واحدة $\vec{T}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة المظلي : $\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$. $(a = 0)$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضّح في الشكل : $P - T = 0$ ، ومنه :

$T = P = mg = 60 \times 9,81 = 588,5 N$

2 – بالنسبة للمظلة : تخضع المظلة لقوّة ثقلها $\vec{P}'$ ومقاومة الهواء $\vec{f}$ وتوتّر الحبال $\vec{T}'$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة المظلة :

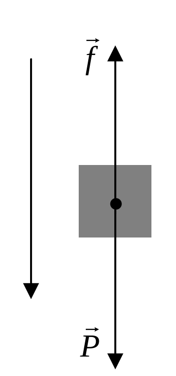
$\vec{P}' + \vec{T}' + \vec{f} = m'\,\vec{a}$. $(a = 0)$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضّح في الشكل : $P' + T' - f = 0$ ،

ولدينا T = T’ (إهمال كتلة الحبال) ، ومنه :

$f = P' + T' = P' + T = 7 \times 9,81 + 588,5 = 657,2 N$

التمرين 30



1 - بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة مركز عطالة المظلّي : $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$

بإسقاط العلاقة الشعاعية على المحور الموضّح في الشكل : $P - f = m\,a$ (1)

لدينا $a = \dfrac{dv}{dt}$ و $f = k\,v^2$ ، وبالتالي نكتب المعادلة التفاضلية : $mg - k\,v^2 = m\dfrac{dv}{dt}$

بتقسيم طرفي المعادلة على m ، نكتب : $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}\,v^2 = g$ (2)

2 – قوة الثقل لا تتغيّر أثناء الحركة . في بداية السقوط تكون سرعة الجسم معدومة ، وأثناء النزول تزداد سرعته ، وبالتالي تزداد قوة الاحتكاك . وفي اللحظة التي تصبح فيها $f = P$ يصبح $a = 0$ (العلاقة 1) ، أي $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ، وتصبح الحركة منتظمة .

3 - المعامل k هو معامل ثابت ، إذن يمكن أن نحسبه في أية لحظة . مثلا عندما تكون السرعة ثابتة يكون $\dfrac{dv}{dt} = 0$

بالتعويض في العلاقة (2) نكتب : $\dfrac{k}{m}\,v^2 = g$ ، وبالتالي $k = \dfrac{mg}{v^2} = 48,4\ kg.m^{-1}$

التمرين 31

1 - أ) نعلم أن السرعة الابتدائية هي سرعة الجسم في اللحظة $t = 0$. من البيان نستنتج $v_0 = 0$.

ب) من البيان نلاحظ أن بعد اللحظة $t = 0,9\ s$

تصبح سرعة الجسم ثابتة ، و هذه السرعة هي السرعة الحديّة ،

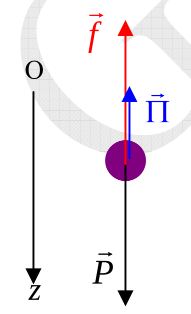
$v_l = 400\ mm/s = 0,4\ m/s$

2 - الزمن المميّز للسقوط : فاصلة تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع الخط المقارب هي قيمة الزمن المميّز للسقوط . $\tau = 0,36\ s$

3 - التسارع هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، فهو يمثّل ميل المماس لبيان السرعة .

$$a_0 = \frac{AB}{OB} = \frac{0,450}{0,4} = 1,12\ m/s^2$$

4 - من المعادلة التفاضلية $\dfrac{dv_z}{dt} = g\left(1 - \rho_f\dfrac{V_s}{m}\right) - \dfrac{k}{m}v_z$ نستنتج أن عبارة الزمن المميّز للسقوط هو $\tau = \dfrac{m}{k}$



حيث ρ_f : الكتلة الحجمية للزيت ، V_s : حجم الكرة

وبالتالي $k = \dfrac{m}{\tau} = \dfrac{13,3\times10^{-3}}{0,36} = 0,037\ kg/s$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{f} + \vec{\Pi} + \vec{P} = m\,\vec{a}$ ، ثم بإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي Oz :

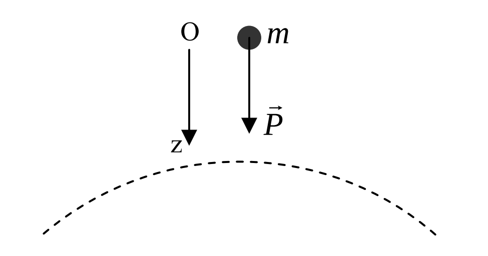
$mg - kv - \Pi = m\dfrac{dv}{dt}$ ، ومن أجل $\dfrac{dv}{dt} = 0$ تكون $v = v_l = 0,4\ m/s$ ، ومنه

$$\Pi = mg - kv_l = 13,3\times10^{-3}\times9,8 - 0,037\times0,4 = 1,15\times10^{-1}\,N$$

التمرين 32

1 - أثناء السقوط لا يخضع الجسم إلا لقوة ثقله (عدم وجود أية مقاومة ، وكأن الجسم يسقط داخل أنبوب نيوتن) . أنبوب نيوتن هو أنبوب زجاجي يوجد داخله 3 أجسام مختلفة : كرة خشبية صغيرة ، كرة معدنية صغيرة ، ريشة طائر . لما نفرّغ الأنبوب من الهواء نلاحظ أن هذه الأجسام كلها تسقط بنفس الشكل ، أي عندما نقلب الأنبوب شاقوليا ، فإنها تصل إلى أسفل الأنبوب في نفس الوقت . وهذا ما يحدث لهذه الأجسام بجوار سطح القمر . أنبوب نيوتن موجود في كل المخابر .

الجسم يسقط سقوطا حرّا على سطح القمر .



2 – المعادلة التفاضلية : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{P} = m\,\vec{a}$

بإسقاط العلاقة على Oz : $mg = m\dfrac{dv}{dt}$ ، وبالتالي : $\dfrac{dv}{dt} = g$

3 – المعادلات الزمنية : المقصود هو : $z(t)$,$v(t)$, $a(t)$

$a(t) = g$ ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة السرعة :

$v(t) = gt + v_0$ ، ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة الفاصلة :

$$z(t) = \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$

4 - مدّة السقوط : حسب العبارة : " **ترك رجل الفضاء جسما يسقط** ..." نفهم أن السرعة الابتدائية معدومة .

لدينا : $h = \dfrac{1}{2}gt^2$ ، حيث t هي مدّة السقوط ، ومنه $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{4}{1,6}} = 1,58\ s$

سرعة مركز عطالة الجسم : $v = gt = 1,6 \times 1,58 = 2,53\ m/s$

التمرين 33

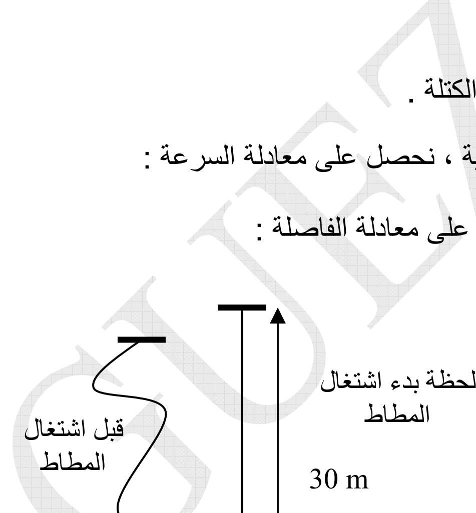
1 - بما أن السقوط حر ، إذن الشخص لا يخضع إلا لقوّة ثقله أثناء سقوطه :

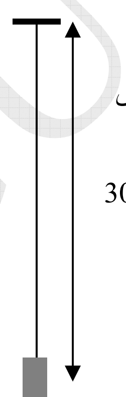
القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m\vec{g} = m\,\vec{a}$ ، ومنه $\vec{a} = \vec{g}$ ، فالتسارع إذن مستقل عن الكتلة .

معادلات الحركة : $a(t) = g$ ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة السرعة :

$v(t) = gt + v_0$ ، ، بالمكاملة بالنسبة للزمن واستعمال الشروط الابتدائية ، نحصل على معادلة الفاصلة :

$$z(t) = \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$





إحداثيات تسارع الشخص هي $\vec{a}(0,0,a_z) = (0,0,g)$

ومنه المسار هو الشاقول (حركة مستقيمة) .

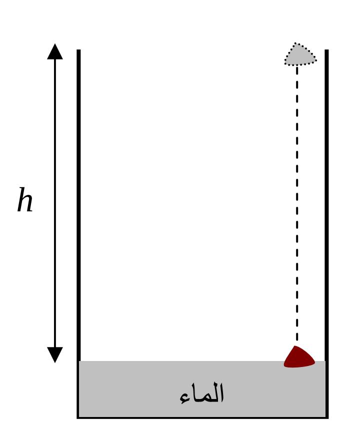
2 – قبل أن يبدأ المطاط في التأثير على الشخص يكون هذا الأخير خاضعا فقط لقوّة ثقله .

أ) مدّة السقوط : $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{60}{9,8}} = 2,47\ s$

ب) السرعة : $v = gt = 9,8 \times 2,47 = 24,2\ m/s$

جـ) الطاقة الحركية : $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2 = 0,5 \times 75(24,2)^2 = 2196\ J$

التمرين 34



نفرض أن الحجر تركناه يسقط من حافة فوهة البئر . ثم أن عمق البئر المطلوب هو فقط من حافة فوهة البئر حتى مستوى سطح الماء .

نفرض كذلك أن الحجر سقط في البئر سقوطا حرّا .

1 - $h = \frac{1}{2}gt^2 = 0,5\times 9,8\times 4 = 19,6m$

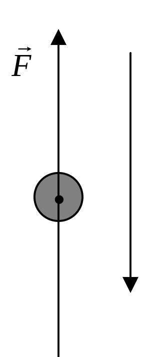
2 - $v = gt = 9,8\times 2 = 19,6\ m/s$ (سرعة وصول الحجر إلى سطح الماء)

3 – نفرض أن أذن الشخص الذي ترك الحجر يسقط في البئر كانت بجوار حافة البئر .

ينتشر الصوت بسرعة ثابتة ، إذن $t_s = \frac{h}{v_s} = \frac{19,6}{340} = 0,057\ s$

يصل الصوت إلى أذن الشخص بعد مدة زمنية قدرها $t' = t + t_s = 2 + 0,057 = 2,057\ s$

التمرين 35



1 - ثقل قطرة الماء : $P = mg = \rho_{eau}Vg$

دافعة أرخميدس التي تؤثر على الكرة في الهواء : $\Pi = \rho_{air}Vg$.

نقارن بين ثقل القطرة ودافعة أرخميدس بقسمة الثقل على الدافعة $\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} = \frac{1}{1,3\times 10^{-3}} = 769$

نلاحظ أن الثقل أكبر بكثير من دافعة أرخميدس ، لهذا يمكن إهمالها أمام الثقل .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضح في الشكل :

$P - F = m\ a$

$mg - 6\pi r\eta v = m\frac{dv}{dt}$ ، ومنه المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi r\eta}{m}v = g$ (1)

3 – السرعة الحدّية : تبلغ الكرة سرعة حدية ، معناه تصبح سرعتها ثابتة ، وبالتالي : $\frac{dv}{dt} = 0$

باستعمال العلاقة (1) نكتب $\frac{6\pi r\eta}{m}v = g$ ، ومنه $v_l = \frac{mg}{6\pi r\eta}$ (2)

نحسب كتلة قطرة الماء : القطرة عبارة عن كرة إذن حجمها هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، كتلتها : $m = \rho_{eau}\times V$

$$m = \rho_{eau}\times\frac{4}{3}\pi r^3 = 1\times\frac{4}{3}\times 3,14\times\left(20\times 10^{-4}\right)^3 = 3,35\times 10^{-8}g$$

بالتعويض في العلاقة (2) $v_l = \frac{3,35\times 10^{-11}\times 9,8}{6\times 3,14\times 20\times 10^{-6}\times 1,8\times 10^{-5}} = 4,8\times 10^{-2}\ m/s$

التمرين 36

1 - وحدة k و λ : لدينا مثلا $f = k\ v$ ، ومنه $k = \frac{f}{v}$ ، وبالتحليل البعدي : $k = \frac{[K][M][T]^{-2}}{[M][T]^{-1}} = [K][T]^{-1}$

لأن النيوتن هو كتلة مضروبة في تسارع ، أي $kg\ .\ m/s^{-2}$

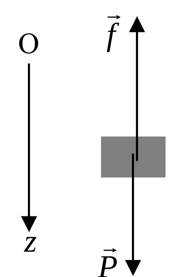
وبالتالي وحدة k و λ هي kg/s

ملاحظة : هناك وحدة أخرى لـ k و λ إذا كان الاحتكاك من الشكل $f = k\,v^2$ ، وهي kg/m

2 – السرعة الحدّية قبل فتح المظلة $v_0 = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{700}{14} = 50\ m/s$

3 - السرعة الحدّية بعد فتح المظلة $v_1 = \dfrac{mg}{\lambda} = \dfrac{700}{350} = 2\ m/s$

4 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (مظلي + مظلة مفتوحة) :



$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور Oz ، $P - f = m\,a$

$mg - \lambda\, v(t) = m\dfrac{dv(t)}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على λ ، نكتب : $\dfrac{mg}{\lambda} - v(t) = \dfrac{m}{\lambda}\dfrac{dv(t)}{dt}$ (1)

ولدينا $v_1 = \dfrac{mg}{\lambda}$ ، وبالتالي تصبح العلاقة (1) $v(t) - v_1 = -\dfrac{m}{\lambda}\dfrac{dv(t)}{dt}$ (2)

إن حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل : $v(t) = Ae^{\alpha t} + B$ (3)

بالتعويض في المعادلة (2) : $Ae^{\alpha t} + B - v_1 = -\dfrac{m}{\lambda}A\alpha e^{\alpha t}$

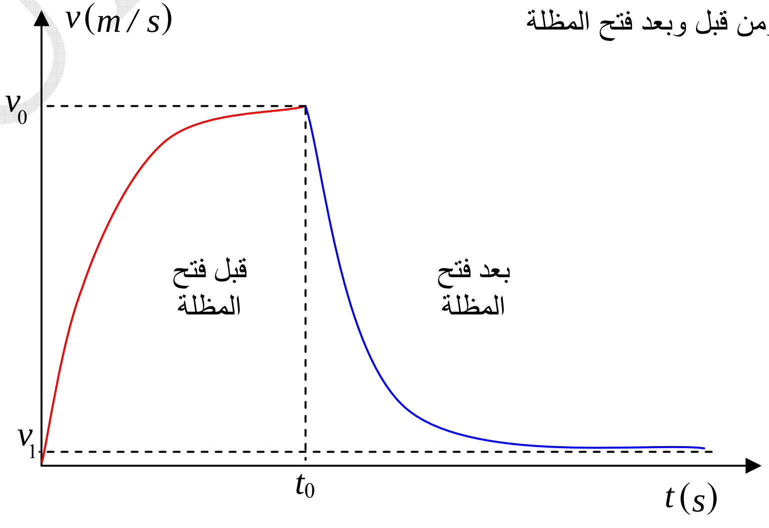
$Ae^{\alpha t}\left(1 + \dfrac{m}{\lambda}\alpha\right) + B - v_1 = 0$ ، ولكي تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون $\left(1 + \dfrac{m}{\lambda}\alpha\right) = 0$ و $B - v_1 = 0$ ، ومنه :

$\alpha = -\dfrac{\lambda}{m}$ و $B = v_1$.

لكي نحدّد A نستعمل الشروط الابتدائية ، أي عند $t = t_0$ كان $v = v_0$ ، حيث v_0 هي السرعة الحدية قبل فتح المظلة . وبالتعويض في المعادلة (3) : $v_0 = Ae^{\alpha t_0} + B$ ، ومنه $A = \dfrac{v_0 - v_1}{e^{-\frac{\lambda}{m}t_0}}$

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية : $v(t) = (v_0 - v_1)e^{-\frac{\lambda}{m}(t - t_0)} + v_1$

للمزيد : تمثيل السرعة بدلالة الزمن قبل وبعد فتح المظلة



التمرين 37

t (ms)	60	120	180	240	300
v (m/s)	0,18	0,24	0,30	0,36	0,42

1 - أ) رسم البيان $v = f(t)$



ب) البيان عبارة عن خط مستقيم معادلته :

$$v = at + v_0$$

ولدينا $v > 0$ و $a > 0$ (الميل) ، وبالتالي $v \times a > 0$

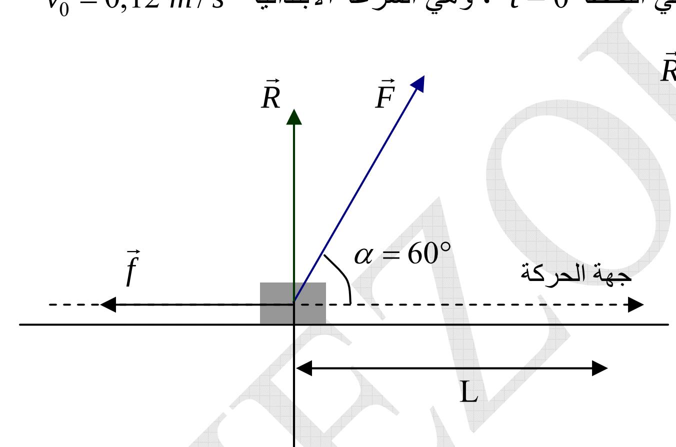
ومنه الحركة متسارعة بانتظام .

التسارع : $a = \frac{CB}{AB} = \frac{2,5 \times 0,05}{5 \times 25 \times 10^{-3}} = 1\ m/s^2$

السرعة عند $t = 0$:

نمدّد البيان إلى أن يقطع محور السرعة فنحصل على قيمة السرعة في اللحظة $t = 0$ ، وهي السرعة الابتدائية $v_0 = 0,12\ m/s$

2 - اختصارا في كل التمارين نرمز لتأثير الطريق على الجسم بـ $\vec{R}$



أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

القوة $\vec{f}$ هي محصلة القوى المقاومة المؤثرة على الجسم .

$\vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضح في الشكل : $F\cos\alpha - f = m\,a$

$$f = F\cos\alpha - ma = 1,4 \times \frac{1}{2} - 0,5 \times 1 = 0,2N$$

ب) عمل قوة تنسحب على مسار مستقيم :

تنتقل نقطة تأثير القوة $\vec{F}$ من A إلى B . العمل المنجز من طرف هذه القوة هو :



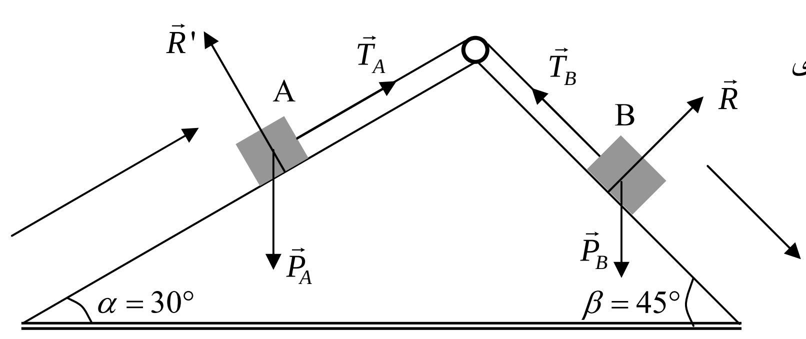
$$W_{\vec{F}} = F \times AB \times \cos\alpha$$

- عمل قوة الثقل : $W_{\vec{P}} = P \times L \times \cos 90 = 0$
- عمل قوة رد فعل الطريق : $W_{\vec{R}} = R \times L \times \cos 90 = 0$
- عمل القوة $\vec{F}$: $W_{\vec{F}} = F \times L \times \cos\alpha = 1,4 \times 2 \times \cos 60 = 1,4J$
- عمل قوة الاحتكاك $\vec{f}$: $W_{\vec{f}} = f \times L \times \cos 180 = 0,2 \times 2 \times (-1) = -0,4J$

جـ) الطاقة المخزنة خلال هذا الانتقال :

$$\Delta E_C = \sum W = 1,4 - 0,4 = 1\ J$$

التمرين 38



1 – بما أن الجملة متوازنة ، فإن المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على كل جزء منها يكون معدوما .

الجسم A :

$\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{R}' = 0$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموازي للمستوي المائل ، نكتب :

$$T_A - P_A \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

الجسم B :

$\vec{P}_B + \vec{T}_B + \vec{R} = 0$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموازي للمستوي المائل ، نكتب :

$$P_B \sin\beta - T_B = 0 \qquad (2)$$

$T_A = T_B$ لأن الجملة ساكنة . وبجمع العلاقتين (1) و (2) نجد : $P_A \sin\alpha = P_B \sin\beta$ ، وبتعويض P بـ $m\,g$ واختصار g :

نكتب : $m_A \sin\alpha = m_B \sin\beta$

2 - أ) لكي نستنتج طبيعة الحركة يجب أن نجد عبارة التسارع ، وذلك بدراسة حركة الجسمين A و B . (الحركة في جهة B)

الجسم A :

$\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{R}' = m_A\,\vec{a}_A$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموازي للمستوي المائل ، نكتب :

$$T_A - P_A \sin\alpha = m_A\,a_A \qquad (3)$$

الجسم B :

$\vec{P}'_B + \vec{T}_B + \vec{R} = (m_B + m)\,\vec{a}_B$ ، وبإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور الموازي للمستوي المائل ، نكتب :

$$P'_B \sin\beta - T_B = (m_B + m)\,a_B \qquad (4)$$

$T_A = T_B$ لأن كتلة البكرة مهملة . $a_A = a_B = a$ لأن أجزاء الجملة مرتبطة ، وبجمع العلاقتين (3) و (4) نجد :

$a = \dfrac{(m_B + m)\,g \sin\beta - m_A g \sin\alpha}{m_A + m_B + m}$ ، ولدينا من المعطيات أن $m_A = m_B + m$ ، ومنه :

$a = \dfrac{m_A\,g \sin\beta - m_A g \sin\alpha}{2\,m_A}$ ، وبالتالي : $a = \dfrac{g\,(\sin\beta - \sin\alpha)}{2}$

أثناء الحركة لا تتغير المقادير β , α , g ، إذن التسارع يبقى ثابتا ، ومنه الحركة متغيرة بانتظام .

قيمة التسارع : $a = \dfrac{10\,(0,707 - 0,5)}{2} = 1,03\ m/s^2$

ب) سرعة الجملة بعد 5 ثوان من بدء الحركة : $\Delta v = at$ ، حيث t هي المدة الزمنية المستغرقة .

$\Delta v = v - 0 = v$ (لأن الجملة أقلعت من السكون) ، وبالتالي $v = 1,03 \times 5 = 5,15\ m/s$

التمرين 39

1 – الشروط التي يجب احترامها عند انجاز الفيلم : يجب إجراء التجربة في مكان لا توجد به تيارات هوائية . مثلا في المخبر مع غلق الباب والنوافذ . وإلا تصبح حركة الكرة أكثر تعقيدا .

2 – حسب السلم المعطى ، فإن : 4,5 cm على الرسم يوافق 1 m على الواقع .

وبالتالي $1\ \text{cm} \rightarrow 0,22\ \text{m}$

أ) طويلة السرعة اللحظية في الموضع G_2 تعطى بالعلاقة :

$$v_2 = \frac{G_1G_3}{2\tau} = \frac{1,8 \times \frac{1}{4,5}}{0,08} = 5\ m/s$$

طويلة السرعة اللحظية في الموضع G_4 تعطى بالعلاقة :

$$v_4 = \frac{G_3G_5}{2\tau} = \frac{1,6 \times \frac{1}{4,5}}{0,08} = 4,4\ m/s$$

نستعمل السلم $1\ cm \rightarrow 1\ m/s$ لتمثيل شعاعي السرعتين في G_2 و G_4 .

نلاحظ أن للشعاع $\Delta\vec{v}_3$ نفس اتجاه وجهة تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$.

طويلة الشعاع $\Delta\vec{v}_3$ هي $\Delta v_3 = 0,8 \times 1 = 0,8\ m/s$

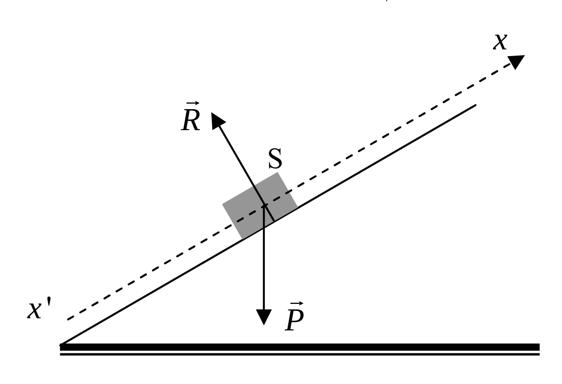
ب) نحسب تسارع الكرية بالعلاقة $a = \frac{\Delta v_3}{2\tau} = \frac{0,8 \times 1}{0,08} = 10\ m/s^2$

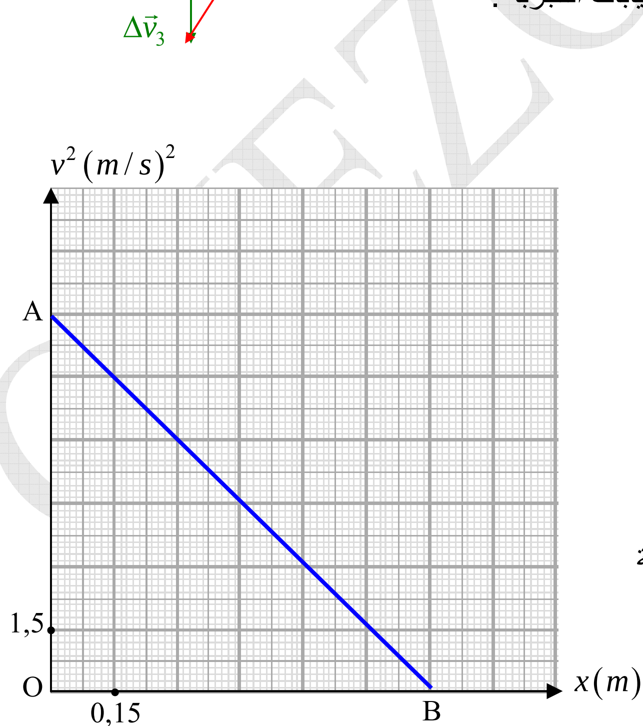
نمثل التسارع منفصلا عن الشكل لضيق المكان ، ونمثل كل $4\ m/s^2$ بـ 1 cm

3 - المقارنة بين a و g : نلاحظ أن التسارع $a = g$ في حدود إرتيابات التجربة .

التمرين 40

1 - أ) دراسة حركة الجسم S .





بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور $x'x$

$-P\sin\alpha = m\,a$ ، ومنه $a = -g\sin\alpha$

بما أن التسارع ثابت وسالب فإن الحركة متباطئة بانتظام (شعاع السرعة موجه في جهة $x'x$) .

ب) العلاقة النظرية هي : $v^2 - v_0^2 = 2a\,x$ ، حيث x هي المسافة المقطوعة لبلوغ السرعة v .

العلاقة التجريبية من الشكل : $v^2 = bx + c$ ، وبمطابقة العلاقة النظرية والعلاقة التجريبية نجد :

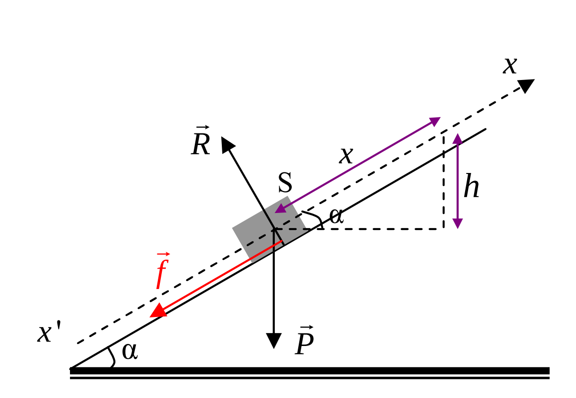
$b = -2g\sin\alpha$ و $c = v_0^2$

نحسب ميل البيان b : $b = -\dfrac{OA}{OB} = -\dfrac{6\times 1,5}{6\times 0,15} = -10$ ، وباستعمال العلاقة السابقة لـ b نجد : $\sin\alpha = \dfrac{-10}{-2g} = \dfrac{10}{20} = 0,5$

ومنه : $\alpha = 30°$

من البيان لدينا $c = 6\times 1,5 = 9$ ، وبالتالي $v_0^2 = 9$ ، ومنه $v_0 = 3\ m/s$

2 - أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم (S)



$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}'$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور $x'x$

$-P\sin\alpha - f = m\,a'$ ، ومنه $a' = -g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$

ب) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية : $E_c - E_{c,0} = \sum W$

$\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = -fx - mgh$ (عمل $\vec{R}$ معدوم لأن $\vec{R} \perp x'x$)

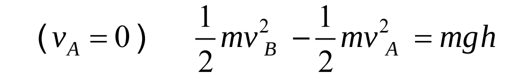
$\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = -fx - mg\,x\sin\alpha$

$0,2 - \dfrac{1}{2}\times 0,1\times 9 = -f\times 0,4 - 0,1\times 10\times 0,4\times 0,5$ ، $f = 0,125N$

التمرين 41

A
h
α
B
C
N
O
β
D

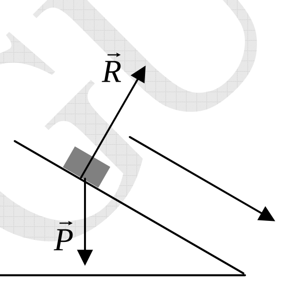
1 – أ) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين النقطتين A و B



$\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = mgh$ $(v_A = 0)$

$v_B^2 = 2gh$ ، ومنه $h = \dfrac{v_B^2}{2g} = \dfrac{100}{20} = 5\ m$

ب) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بين A و B



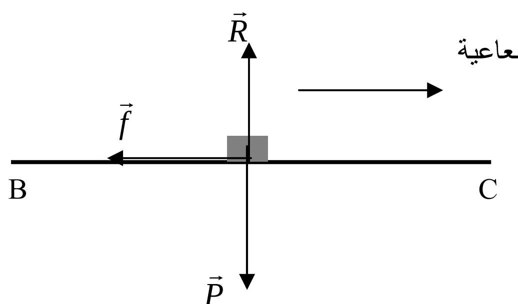


$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموضح في الشكل :

$P\sin\alpha = m\,a$ ، ومنه $a = g\sin\alpha$ ، وبما أن التسارع ثابت وموجب فإن الحركة متسارعة بانتظام .

جـ) لحساب التسارع نطبّق العلاقة : $v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، ومنه :

$a = \dfrac{v_B^2}{2AB} = \dfrac{100}{2\times 10} = 5\ m/s^2$



2 - أ) القوى المطبّقة على الجسم S :

ب) نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{f}+\vec{R}=m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط العلاقة الشعاعية

على المحور الموضّح في الشكل : $-f=m\,a$ ، ومنه $a=\dfrac{-f}{m}$ (1)

التسارع a ثابت ، إذن الحركة متغيّرة بانتظام .

نحسب التسارع من العلاقة : $a=\dfrac{v_C^2-v_B^2}{2(BC)}=\dfrac{9-100}{2\times 22,75}=-2\ m/s^2$

بالتعويض في العلاقة (1) نحسب شدة قوة الاحتكاك ، $f=-m\,a=-0,1\times(-2)=0,2N$

3 - أ) عبارة السرعة في النقطة N :

ملاحظة : في الحقيقة ، وما دام الجسم يملك سرعة أفقية في النقطة C ، يمكن أن يغادر المسار في النقطة C (قذيفة بسرعة أفقية)

لكن يمكن أن نقبل ما تبقى من التمرين لسبب واحد ، وهو أن نصف قطر المسار الدائري كبير $(r=3\text{ m})$ ، وبهذا يمكن أن يكون مسار القذيفة (القطع المكافئ) يقع أسفل المسار الدائري ، مما يجعل الجسم يبقى يمس هذا المسار الدائري أثناء حركته ويغادره لاحقا .

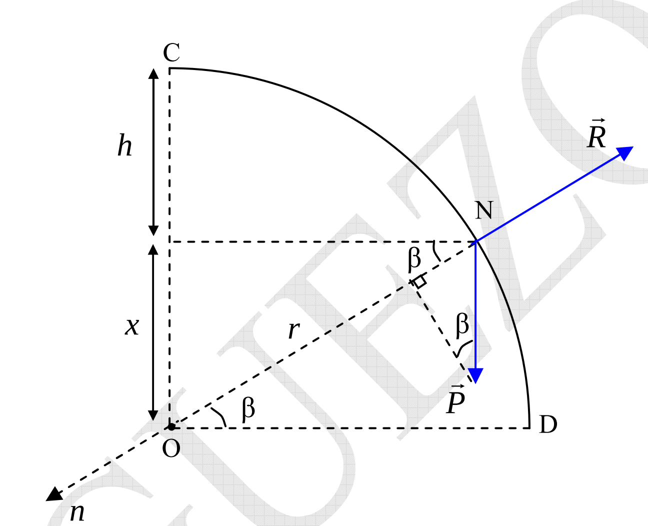
بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين النقطتين C و N .

$\dfrac{1}{2}mv_N^2-\dfrac{1}{2}mv_C^2=mgh$ ، عمل قوة رد فعل المسار على الجسم ($\vec{R}$) معدوم لأن هذه القوة تبقى عمودية على المسار أثناء الحركة لعدم وجود احتكاك على المسار الدائري . $(OD=OC=r)$

$v_N^2=2gh+v_C^2$ (2)

مقدار الارتفاع الذي نزله الجسم هو $h=r-x$

ولدينا $x=r\sin\beta$ ، ومنه : $h=r-r\sin\beta=r(1-\sin\beta)$



وبالتعويض في العلاقة (2) :

$v_N^2=2g\,r(1-\sin\beta)+9$ (3)

ب) حساب الزاوية β :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم في النقطة N :

$\vec{R}+\vec{P}=m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الناظمي Nn

من معلم فريني : $P\sin\beta-R=m\,a_n$


حيث a_n هو التسارع الناظمي $a_n=\dfrac{v_N^2}{r}$


$P\sin\beta-R=m\,\dfrac{v_N^2}{r}$ ، وبتعويض عبارة v_N^2 من العلاقة (3) ، نكتب :

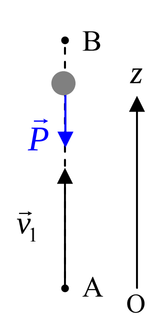
$P\sin\beta-R=m\,\dfrac{2g\,r(1-\sin\beta)+9}{r}$ (4)

في اللحظة التي يغادر فيها الجسم المسار تنعدم قوة رد الفعل ، لأن الجسم لا يصبح يمس المسار ، وبالتالي نضع $R=0$ في (4)

ونجد : $3\sin\beta=2,3$ ، ومنه $\sin\beta=0,766$ ، وبالتالي $\beta=50°$

التمرين 42

في هذا التمرين حدث ما يلي : أخذ اللاعب الكرة بيده وقذفها نحو الأعلى شاقوليا ، ولما ارتفعت بمقدار 0,40 m (وهو أعلى إرتفاع وصلت إليه ، أي انعدام سرعتها) ضربها بواسطة المضرب فأعطاها سرعة إبتدائية أفقية $\vec{v}_0$.



1 – نحسب السرعة التي أعطاها اللاعب للكرة بيده :

تأثير الهواء مهمل ، إذن الجسم لا يخضع إلا لقوة ثقله $\vec{P} = m\,\vec{a}$ ، وبالإسقاط على Oz نجد :

$a = -g$ ، ومنه الحركة متباطئة بانتظام ، ولحساب طويلة السرعة v_1 نطبّق العلاقة :

$v_B^2 - v_1^2 = -2g\,(AB)$ ، ولدينا $v_B = 0$ ، ومنه $v_1 = \sqrt{2g\,(AB)} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,4} = 2,8\ m/s$

2 –

لم نحترم سلم الرسم في هذا التمثيل من أجل أن يكون الشكل واضحا .

اخترنا المعلم (Bx, Bz) لدراسة حركة الكرة .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$\vec{P} = m\,\vec{a}$ ، $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$

احداثيات شعاع التسارع هما $\vec{a}\,(0\ ,\ g)$ ، ومنه الحركة على المحور Bx منتظمة ، وعلى المحور Bz متغيرة بانتظام .

إحداثيات شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec{v}_0\,(v_0\ ,\ 0)$.

نعتبر اللحظة $t = 0$ هي لحظة ضرب الكرة بالمضرب .

المعادلة الزمنية على المحور Bx : $x = v_0\ t$ (1)

المعادلة الزمنية على المحور Bz : $z = \frac{1}{2} g\, t^2$ (2)

نستخرج عبارة الزمن من المعادلة (1) ونعوّضه في المعادلة (2) نجد معادلة المسار : $z = \frac{g}{2v_0^2} x^2$ (3)

3 -

تمر الكرة في النقطة C ذات الإحداثيات (12 m , 1 m) ، حيث حسبنا ترتيب النقطة C كما يلي :

$z_C = 2 - (0,9 + 0,1) = 1\ m$

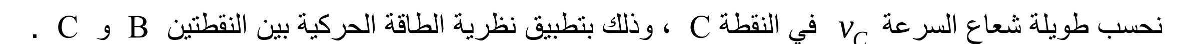
النقطة C تنتمي لمسار الكرة ، وبالتالي إحداثياتها تحقق معادلة المسار ، نعوّض $x = 12$ ، $z = 1$ m في المعادلة (3)

$1 = \frac{g}{2v_0^2} \times (12)^2$ ، ومنه $v_0 = 26,5\ m/s$

منحى شعاع السرعة :

المقصود بمنحى شعاع السرعة هو إيجاد الزاوية β بين شعاع السرعة في النقطة C ومحور الفواصل Bx ، أي بين $\vec{v}_x$ و $\vec{v}$.

لدينا $\cos\beta = \dfrac{v_x}{v_C}$ (4)



نحسب طويلة شعاع السرعة v_C في النقطة C ، وذلك بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين النقطتين B و C .

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ h$$ ، حيث $h = 1\ \text{m}$

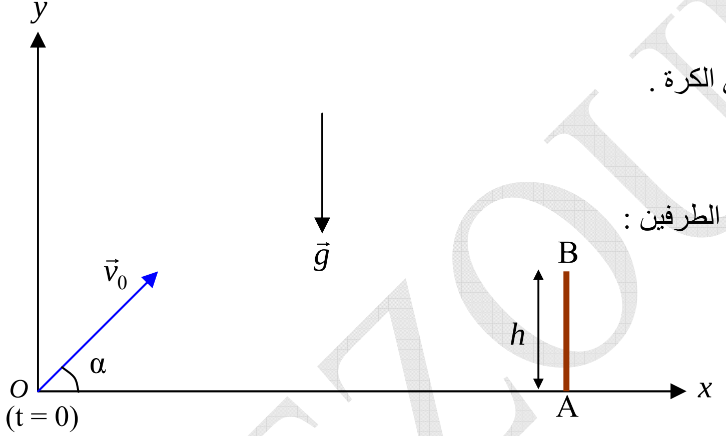
$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2g\ h} = \sqrt{(26{,}5)^2 + 2\times 9{,}8\times 1} = 26{,}8\ m/s$$

بالتعويض في العلاقة (4) : $\cos\beta = \dfrac{26{,}5}{26{,}8} = 0{,}988$ ، ومنه $\beta \approx 9°$

التمرين 43

المستوي الذي ندرس فيه حركة الكرة هو المستوي الشاقولي $(Ox\ ,\ Oy)$. كان من الأحسن كتابة z مكان y في التمرين .

لكن أنصحك أن لا تغيّر الرموز في الامتحان حتى ولو كانت غير منطقية .



1 – معادلة مسار الكرة :

نطبّق القانون الثاني لنيوتن ، مع العلم أن الهواء لا يؤثر على الكرة .

$$\sum \vec{F} = m\ \vec{a}$$

$\vec{P} = m\ \vec{a}$ ، وبتعويض $\vec{P}$ بـ $m\ \vec{g}$ واختصار m من الطرفين :

نجد $\vec{a} = \vec{g}$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما $\vec{a}(0\ ,\ -g)$

مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec{v}_0(v_0\cos\alpha\ ,\ v_0\sin\alpha)$

بما أن التسارع على المحور Ox معدوم ، إذن الحركة على هذا المحور منتظمة ، وسرعتها $v_x = v_0\cos\alpha$ ، وبالتالي :

$$x = v_0\cos\alpha\ t \qquad (2)$$

بما أن التسارع على المحور Oy ثابت ، إذن الحركة على هذا المحور متغيّرة بانتظام ، وبالتالي :

$$y = -\frac{1}{2}g\ t^2 + v_0\sin\alpha\ t \qquad (3)$$

من العلاقة (2) نستخرج $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$ ، ثم نعوّض عبارة الزمن في العلاقة (3) ونجد معادلة المسار :

$$y = -\frac{g}{2\ v_0^2\ \cos^2\alpha}x^2 + x\ tg\alpha$$ ، وهي معادلة قطع مكافئ .

2 - الكرة نقطة مادية ، فهي تشغل النقطة B من المسار في اللحظة t . إحداثيات B هما $(25\ \text{m}\ ,\ 2{,}44\ \text{m})$

نعوّض هاتين القيمتين في معادلة المسار فنجد $v_0 = 18{,}6\ m/s$

3 - لكي نحسب طويلة شعاع سرعة الكرة عند النقطة B نطبق نظرية الطاقة الحركية بين النقطتين O و B

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\ h$$ ، ومنه $$v_B^2 = -2g\ h + v_0^2$$ ،

$$v_B = \sqrt{-2g\ h + v_0^2} = \sqrt{-2\times 10\times 2{,}44 + (18{,}6)^2} = 17{,}2\ m/s$$

4 - فاصلة المدى : $x_P = \dfrac{v_0^2\ \sin 2\alpha}{g} = \dfrac{(18{,}6)^2 \times \sin 60}{10} \approx 30\ m$ ، وبما أن فاصلة الذروة هي نصف فاصلة المدى

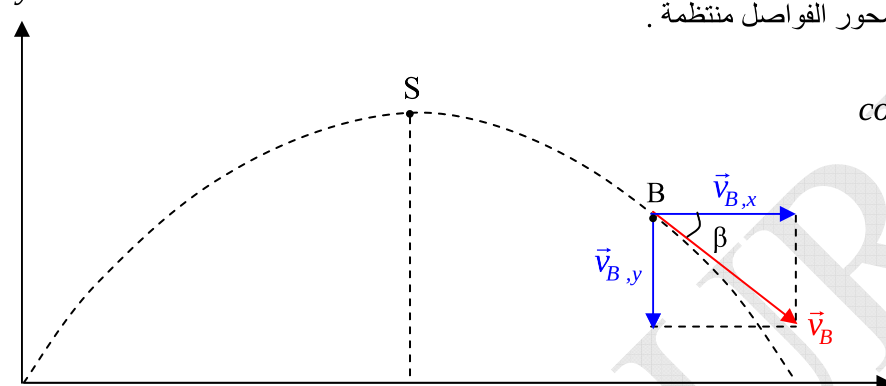
أي $x_S = 15\ m$ ، إذن عمود المرمى يوجد خلف الذروة ، وبالتالي يكون شعاع السرعة متجه نحو الأسفل .

لكي نحدد منحى شعاع السرعة ، نحسب الزاوية β بين شعاع السرعة والمحور Ox ، أي بين شعاع السرعة والمركبة الأفقية لها .

مع العلم أن $v_{B,x} = v_0 \cos\alpha$ لأن الحركة على محور الفواصل منتظمة .

$$\cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_B} = \frac{18{,}6\times \cos 30}{17{,}2} = 0{,}93$$

ومنه $\beta = 20{,}5°$



التمرين 44

1 - نعتبر أن الكرة نقطة مادية ، ونعتبر السلة كذلك نقطة (A) من نقط مسار الكرة .

ندرس حركة الكرة في المعلم (Ox, Oz) .

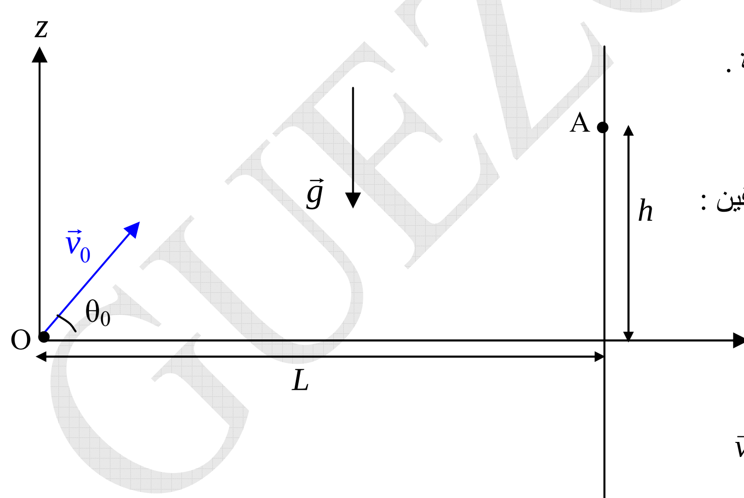
نطبّق القانون الثاني لنيوتن ، مع العلم أن الهواء لا يؤثر على الكرة .

$$\sum \vec F = m\,\vec a$$

$\vec P = m\,\vec a$ ، وبتعويض $\vec P$ بـ $m\,\vec g$ واختصار m من الطرفين :

نجد $\vec a = \vec g$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما $\vec a\,(0\ ,\ -g)$



مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec v_0\,(v_0 \cos\theta_0\ ,\ v_0 \sin\theta_0)$

بما أن التسارع على المحور Ox معدوم ، إذن الحركة على هذا المحور منتظمة ، وسرعتها $v_x = v_0 \cos\theta_0$ ، وبالتالي :

$$x = v_0 \cos\theta_0\ t \qquad (2)$$

بما أن التسارع على المحور Oz ثابت ، إذن الحركة على هذا المحور متغيّرة بانتظام ، وبالتالي :

$$z = -\frac{1}{2}g\ t^2 + v_0 \sin\theta_0\ t \qquad (3)$$

بحذف الزمن بين العلاقتين (2) و (3) نجد معادلة المسار $z=-\dfrac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\,\theta_0}x^2+x\;tg\theta_0$

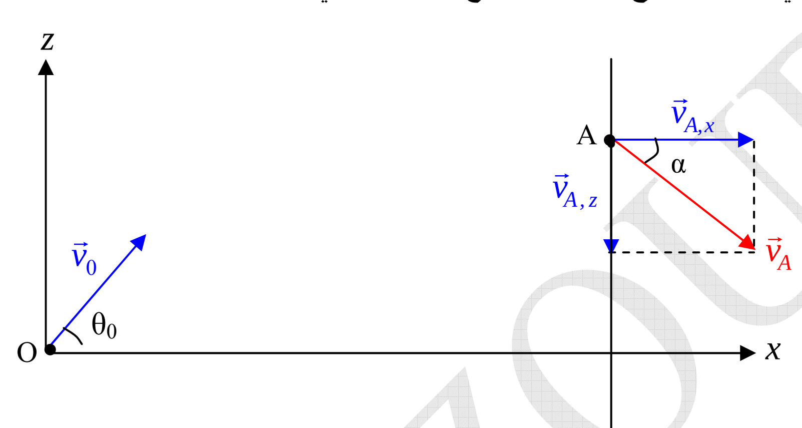
النقطة A ذات الإحداثيات (L,h) تحقق معادلة المسار ، أي $h=-\dfrac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\,\theta_0}L^2+L\;tg\theta_0$

بقسمة طرفي المعادلة على L ، نكتب : $\dfrac{h}{L}=\dfrac{-gL}{2v_0^2\,cos^2\,\theta_0}+tg\theta_0$

$\dfrac{gL}{2v_0^2\,cos^2\,\theta_0}=tg\theta_0-\dfrac{h}{L}$ ، ومنه : $v_0^2=\dfrac{gL}{2cos^2\theta_0\left(tg\theta_0-\dfrac{h}{L}\right)}\qquad(4)$

2 - العلاقة المعطاة في الطبعة الأولى $\left(\alpha=\dfrac{2h}{L-tg\theta_0}\right)$ خاطئة : في المقام لا نطرح عددا مجردا من الوحدة من طول : $tg\theta_0$ مجرّد من الوحدة ، أما L وحدته المتر (m) .

العلاقة الصحيحة : المقصود من السؤال هو الزاوية α التي يصنعها شعاع سرعة الكرة مع المحور الأفقي .



$tg\alpha=\dfrac{v_{A,z}}{v_{A,x}}$ ، وبتربيع طرفي هذه العلاقة ، نكتب :

$$tg^2\alpha=\frac{v_{A,z}^2}{v_{A,x}^2}\qquad(5)$$

لدينا $v_{A,x}=v_0\,cos\,\theta_0\qquad(6)$

لأن الحركة منتظمة على المحور Ox ، أي السرعة ثابتة .

لدينا كذلك الحركة متغيّرة بانتظام على المحور Oz ، وبالتالي :

$v_{A,z}^2-v_0^2\,sin^2\,\theta_0=-2gh$. طبّقنا العلاقة : مربع السرعة النهائية ناقص مربع السرعة الابتدائية يساوي ضعف التسارع في المسافة من O إلى الذروة ، ثم من الذروة إلى A وجمعنا العلاقتين .

مع العلم أن $v_{z,S}=0$ (تنعدم السرعة على المحور Oz عند الذروة)

ومنه $v_{A,z}^2=v_0^2\,sin^2\,\theta_0-2gh\qquad(7)$

بتعويض العلاقتين (6) و (7) في العلاقة (5) ، نكتب : $tg^2\alpha=\dfrac{v_0^2\,sin\theta_0-2gh}{v_0^2\,cos^2\,\theta_0}$

$$tg^2\alpha=\frac{v_0^2\,sin^2\,\theta_0}{v_0^2\,cos^2\,\theta_0}-\frac{2gh}{v_0^2\,cos^2\,\theta_0}\qquad(8)$$

ولدينا من العلاقة (4) : $v_0^2\,cos^2\,\theta_0=\dfrac{gL}{2\left(tg\theta_0-\dfrac{h}{L}\right)}$ ، وبالتعويض في العلاقة (8) :

$$tg^2\alpha = tg^2\theta_0 - \frac{2gh}{\frac{gL}{2\left(tg\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}} = tg^2\theta_0 - \frac{4h\left(tg\theta_0 - \frac{h}{L}\right)}{L} = tg^2\theta_0 - \frac{4h}{L}\times tg\theta_0 + 4\frac{h^2}{L^2}$$

هذه العلاقة الأخيرة عبارة عن متطابقة شهيرة ، أي : $tg^2\alpha = \left(tg\theta_0 - \frac{2h}{L}\right)^2$ ، ومنه :

$tg\alpha = tg\theta_0 - \frac{2h}{L}$ ، وهي العلاقة المطلوبة .

3 - لدينا معادلة المسار هي : $z = -\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\theta_0}x^2 + x\,tg\theta_0$ ، وبتعويض $z = 1\text{ m}$ و $\theta_0 = 45°$ ، نجد :

$1 = -\frac{10}{v_0^2}x^2 + x$ ، ومنه $\frac{10}{v_0^2}x^2 - x + 1 = 0 \quad (9)$

وبحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x نجد : $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{40}{v_0^2}}}{\frac{20}{v_0^2}}$

نلاحظ في هذه العبارة أن x معرف من أجل $v_0^2 > 40$ ، وبالتالي $v_0 > 6{,}32\ m/s$

من أجل كل قيمة لـ $v_0 > 6{,}32\ m/s$ يمكن تسجيل الهدف .

من أجل $v_0 = 6{,}32\ m/s$ ، نعوّض في العلاقة (9) نجد $x = 2m$.

يجب على اللاعب أن لا يقترب أكثر من 2 m نحو السلة بزيادة أو نقصان القيمة $22cm$ ، وإلا لا يمكنه تسجيل الهدف .

مركز عطالة الكرة داخل السلة بإمكانه أن يتحرك على خط طوله $l = 46 - 24 = 22cm$

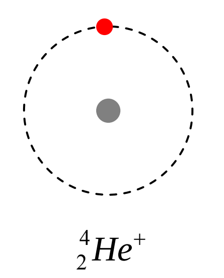
ملاحظة : في السؤال المطروح ، يجب أن نقول : ما هي أقل مسافة عن الشاقول المار من السلة حتى يتمكن اللاعب من تسجيل الهدف ...

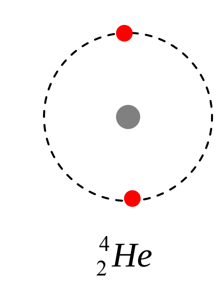
التمرين 45

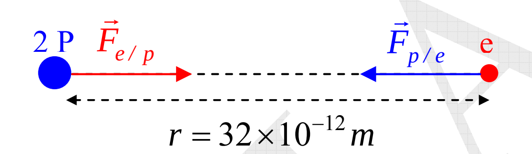
1 - تركيب الشاردة $^4_2He^+$ معناه عدد البروتونات والنوترونات في نواتها وعدد الإلكترونات في مداراتها .

2 بروتون ، 2 نوترون ، 1 إلكترون .

2 – شدة القوة المطلوبة هي قوة التجاذب الكهربائي بين البروتونين والإلكترون .







$$F_{p/e} = F_{e/p} = k\times\frac{2q_p\times q_e}{r^2} = 9\times10^9\times\frac{3{,}2\times10^{-19}\left|-1{,}6\times10^{-19}\right|}{\left(32\times10^{-12}\right)^2} = 4{,}5\times10^{-7}\,N$$

التمرين 46

1 – الفعل المتبادل الجاذبي : $F = G\times\frac{m_p\times m_e}{r^2}$

الفعل المتبادل الكهربائي : $F' = k\times\frac{q_p\times q_e}{r^2}$

لكي يتغلب الفعل المتبادل الجاذبي على الفعل المتبادل الكهربائي يجب على الأقل أن يكون :

$G\times\frac{m_p\times m_e}{r^2} \geq k\times\frac{q_p\times q_e}{r^2}$ ، ولدينا $m_e = \frac{m_p}{2000}$ ، وبالتالي : $G\times\frac{m_p^2}{2000} \geq k\times q_p\times q_e$

ومنه : $m_p \geq \sqrt{\frac{k\times q_p\times q_e\times 2000}{G}}$ ، $m_p \geq 8{,}3\times10^{-8}\,kg$

يجب أن تكون أصغر كتلة للبروتون $m_p = 8{,}3\times10^{-8}\,kg$!!

2 – الكتلة الحقيقية للبروتون هي $m_p = 1{,}673\times10^{-27}\,kg$ ، وهي أصغر من الكتلة التي حسبناها بـ $\frac{8{,}3\times10^{-8}}{1{,}673\times10^{-27}} \approx 5\times10^{19}$

هذا ما يدل على أن قوة التجاذب المادي ضعيفة جدا إذا ما قورنت بقوة التجاذب الكهربائي بين الإلكترونات والنواة .

التمرين 47

1 – الدقائق α هي أنوية الهيليوم $_{2}^{4}He^{2+}$

2 – النموذج الذي كان سائدا قبل نموذج روذرفورد هو نموذج دالتون (1803) .

من أجل شرح التفاعلات الكيميائية تصوّر دالتون أن الذرات هي كرات مملوءة يمكن أن تتحد مع بعضها خلال التفاعلات الكيميائية .

3 – عيوب نموذج روذرفورد :

رغم أن النموذج الذري لروذرفورد قد فتح مجالا واسعا أمام الفيزياء الحديثة ، إلا أن بعض العيوب كانت تتخلله ، مثل الطاقة المستمرة للذرة (تشبيه البنية الذرية بالنموذج الكوكبي) .

وكأنه يشبّه القمر الصناعي بالإلكترون والأرض بالنواة ، ونحن نعلم أن كل ارتفاعات القمر الصناعي عن سطح الأرض محتملة .

لو كان الأمر كذلك بالنسبة للإلكترون والنواة ، لوجدنا ذرات عنصر واحد مختلفة في أشكالها نتيجة التصادمات التي يمكن أن تجعل الإلكترونات في كل مكان في الذرة .

4 – بيّن بور أن طاقة الذرة مكمّمة ، أي أنها لا تأخذ إلا قيما محدّدة (أي غير مستمرّة) ، وأن انتقال إلكترون من مدار إلى مدار آخر لا يتم إلا بواسطة امتصاص أو بعث فوتون طاقته مساوية للفرق بين طاقتي المدارين .

5 – لا يمكن الإجابة عن هذا السؤال إلا إذا كان قصده : ما سبب تشكل طيف الانبعاث ؟

طيف الانبعاث يتشكل من انتقال الإلكترونات من مدارات بعيدة إلى مدارات أقرب للنواة ، وبالتالي إصدار إشعاعات ألوانها تتماشى مع الكم الطاقوي المنبعث .

مثلا : رجوع إلكترون من مستوى الطاقة E_2 إلى E_1 ، فإذا كان $\Delta E = E_2 - E_1 = h\,\nu$ ، حيث التواتر ν يوافق تواتر إشعاع اصفر نلاحظ في الطيف خطا أصفر أمام طول الموجة الموافق له .

مجال تطبيق الأطياف :

نعلم أن الطيف الذري هو خاصية من خواص ذرة معيّنة . يمكن مثلا بواسطة تحليل الضوء الصادر عن النجوم معرفة أنواع التفاعلات الكيميائية داخل هذه النجوم .

طيف ذرة = بطاقة تعريف هذه الذرة

التمرين 48

1 - طولا موجتي الإشعاعيين في الفراغ : 1 nanomètre (ηm) $= 10^{-9}$ m

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{2{,}998\times10^{8}}{5{,}087\times10^{14}} = 0{,}589\times10^{-6}\,m = 0{,}589\times10^{-6}\times10^{9} = 589\ \eta m$$

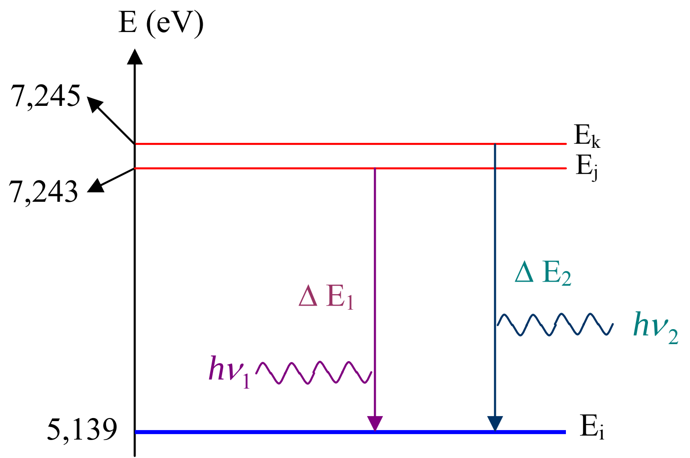
$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{2{,}998\times10^{8}}{5{,}092\times10^{14}} = 0{,}588\times10^{-6}\,m = 0{,}588\times10^{-6}\times10^{9} = 588\ \eta m$$

2 – تفسير هذا الطيف : رجوع الإلكترونات بعد إثارة الذرة إلى مستويات أقرب للنواة (مثلا الرجوع إلى مستوى الطاقة الأساسي لذرة الصوديوم) ينتج عنه انبعاث فوتونات تحمل الطاقة التي تخلّصت منها الإلكترونات عند رجوعها .

3 - $E_j - E_i = h\nu_1$ ، ومنه $E_j = E_i + h\nu_1 = 5{,}139 + \left(\frac{6{,}626\times10^{-34}\times5{,}087\times10^{14}}{1{,}602\times10^{-19}}\right) = 7{,}243\ eV$

$E_k - E_i = h\nu_2$ ، ومنه $E_k = E_i + h\nu_2 = 5{,}139 + \left(\frac{6{,}626\times10^{-34}\times5{,}092\times10^{14}}{1{,}602\times10^{-19}}\right) = 7{,}245\ eV$

4 - السلم غير محترم بين المستويات .



التمرين 49

1 - مستوى الطاقة $E = 0$ هو الموافق لـ $n \to \infty$ في العلاقة $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ ، وبالتالي $E_\infty = 0$

هذه الحالة توافق إصطلاحا الحالة التي تكون فيها ذرة الهيدروجين متشرّدة ، أي أن إلكترونها الوحيد قد إنتقل إلى ما لا نهاية .

2 - نغيّر قليلا في السؤال حتى يصبح مفهوما أكثر : << ما هو مستوى الطاقة الذي ينتقل إليه الإلكترون من ذرة الهيدروجين وهي في حالتها الأساسية عندما تتأثر باشعاع ذي طول موجة 91,2 nm >>

نحسب الطاقة التي قدّمها الإشعاع للذرة من العلاقة $E = h\nu$ (1)

لدينا : $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{91,2\times10^{-9}} = 3,289\times10^{15}\ Hz$ ، وبالتعويض في العلاقة (1)

$$E = h\nu = 6,62\times10^{-34}\times3,289\times10^{15} = 2,177\times10^{-18}\,J = \frac{2,177\times10^{-18}}{1,6\times10^{-19}} = 13,6\ eV$$

هذه القيمة هي الفرق بين طاقة المستوى الذي هاجر له الإلكترون (E_n) وطاقة المستوى الأساسي E_i ، وبالتالي :

$E_n - E_i = 13,6$ ، ومنه : $E_n = E_i + 13,6 = -13,6 + 13,6 = 0$

ومن العلاقة $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ نستنتج أن $n \to \infty$ ، أي أن الإلكترون غادر الذرّة ، أي أن ذرة الهيدروجين قد تشرّدت .

3 - من المستوى $n = 3$ إلى $n = 2$ يكون $\Delta E = E_3 - E_2 = -1,51 - (-3,4) = 1,89\ eV$

نحسب تواتر الإشعاع من العلاقة : $\Delta E = h\nu$ ، ومنه $\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1,89\times1,6\times10^{-19}}{6,62\times10^{-34}} = 4,56\times10^{14}\ Hz$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times10^8}{4,56\times10^{14}} = 0,658\times10^{-6}\ m = 0,656\ \mu m$$

الكتاب الثاني — **الأسترة وإماهة الأسـتر**

الوحدة 06

GUEZOURI Aek – lycée Maraval - Oran

تمارين الكتاب

II- تمارين الكتاب المدرسـي - الجزء الأول

التمرين 16

1- معادلة التفاعل : $H-COOH + CH_3-CH_2-CH_2-OH = H-COO-C_3H_7 + H_2O$

الأسـتر الناتج هو **ميثـانوات البروبيل**

2 - خصائص التفاعل : لا حراري - بطيء في البرودة - غير تام (محدود)

3 - هذا التفاعل محدود بسبب التفاعل العكسي بين الأسـتر والماء والذي يؤدي إلى توازن كيميـائي .

4 – يمكن تحسين المردود بالطرق الثلاث :

- الإكثار من كمية مادة أحد المتفاعلين (الحمض أو الكحول)
- سحب أحد النواتج (الماء أو الأستر) خلال التفاعل .
- وإذا أردنا أن نؤستر الكحول تماما نستبدل الحمض الكربوكسيلي بأحد مشتقاته (كلور الميثانويل)

التمرين 17

الصيغ نصف المفصلة الممكنة لهذا الأسـتر :

$H-COO-CH_2-CH_2-CH_3$: الحمض : حمض الميثـانويك ، الكحـول : البروبـان – 1 – أول

$H-COO-CH-(CH_3)_2$: الحمض : حمض الميثـانويك ، الكحـول : البروبان – 2 – أول

$CH_3-COO-C_2H_5$: الحمض : حمض الإيثـانويك ، الكحول : الإيثـانول

$CH_3-CH_2-COO-CH_3$: الحمض : حمض البروبانويك ، الكحول : الميثــانول

التمرين 18

نقول البوتـانوات أو البيوتانوات

بوتـانوات 2 – مثيل بروبيل هو :

```
   H  H  H  O     H  H  H
   |  |  |  ||    |  |  |
H—C—C—C—C—O—C—C—C—H
   |  |  |        |  |  |
   H  H  H        H CH3 H
```

1 - معـادلة التفاعل :

$$C_3H_7-COO-CH_2-CH(CH_3)-CH_3 + H_2O = C_3H_7-COOH + CH_3-CH(CH_3)-CH_2-OH$$

2 - الحمض الناتج : حمض البوتانويك

الكحـول الناتج : 2 – ميثيل بروبان – 1 - أول

3 – يمكن استعمـال شوارد الهيدرونيوم (إضافة قطرات من حمض الكبريت مثلا) لتسريع التفاعل ، وهذا لا يؤثر على المردود ، أي على نسبة التقدّم النهـائي ، بل يؤدي للوصول لها في أسرع وقت .

4 – نستعمل الماء بزيادة لتحسين مردود الإماهة .

التمرين 19

البيانات المعطاة في التمرين لا توافق المعطيـات !

كل التفاعلات مردودها 0,67 ما عدا التفاعل في التجربة e .

تصحيح البيانات حسب الجدول :

التجربة	a	b	c	d	e
$n_1(mol)$	1	1	1	1	1
$n_2(mol)$	1	1	1	1	0,5
$\theta(°C)$	50	50	80	20	80
$(2H_3O^+, SO_4^{2-})$	0	2	2	0	2

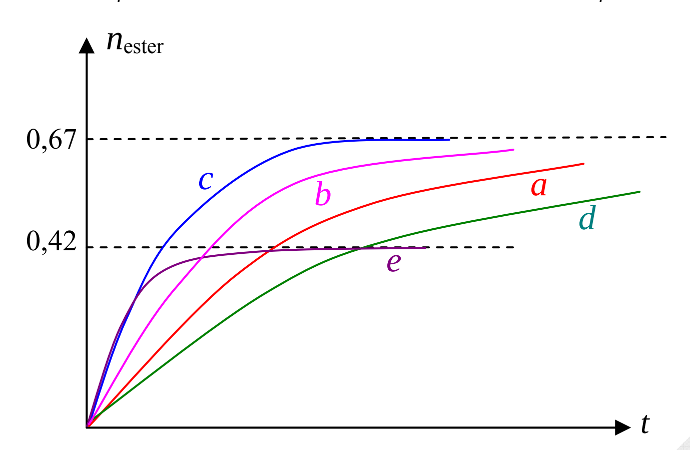
حسـاب المردود في التجربة e :

$\frac{x_f^2}{(1-x_f)^2(0,5-x_f)^2}=4$ ، وهذا يؤدّي للمعادلة من الدرجة الثانية :

$3x^2-6x+2=0$ ، حلا هذه المعادلة هما : $x_f=0,42$ و $x_f=0,84$ ونرفض $x=0,84$ لأنه أكبر من $x_f=0,5$.

بعد تصحيح البيانات نرفق كل بيان بالتجربة الموافقة له :

التعليل : درجة الحرارة وشوارد H_3O^+ يسرّعان التفاعل بدون التأثير على المردود .



التمرين 20

الكحول	الصنف	الحمض	$n_{0acide}(mol)$	$n_{Al}(mol)$	الوسيط	المزيج	$n_{acide}(mol)$
C_3H_7-OH	أولي	CH_3-COOH	2	2	نعم	A	**0,66**
$CH_3-CHOH-CH_3$	ثانوي	CH_3-COOH	2	2	نعم	B	**0,8**
C_3H_7-OH	أولي	CH_3-COOH	2	1	نعم	C	**1,16**
C_3H_7-OH	أولي	CH_3-COOH	2	4	نعم	D	**0,31**
C_3H_7-OH	أولي	CH_3-COOH	1	2	نعم	E	**0,16**
$CH_3-CHOH-CH_3$	ثانوي	CH_3-COOH	2	2	لا	F	**0,8**

المزيج A : الكحول أولي والمزيج متساوي المولات ، إذن $x_f=2\times0,67=1,34\,mol$ ، وبالتالي : $n_{acide}=2-1,34=0,66\,mol$

المزيج B : الكحول ثـانوي والمزيج متساوي المولات ، إذن $x_f=2\times0,60=1,2\,mol$ ، وبالتالي :

$n_{acide}=2-1,2=0,80\,mol$

المزيج C : الكحول أولي (المزيج غير متساوي المولات) ، $K=4$.

تنبيه : $K=4$ سواء كان المزيج متساوي المولات أو غير متسـاوي المولات .

نحسب التقدم عند التوازن : $\frac{x_f^2}{(1-x_f)^2(2-x_f)^2}=4$ ونجد $x_f=0,84\,mol$ ، وبالتالي $n_{acide}=2-0,84=1,16\,mol$

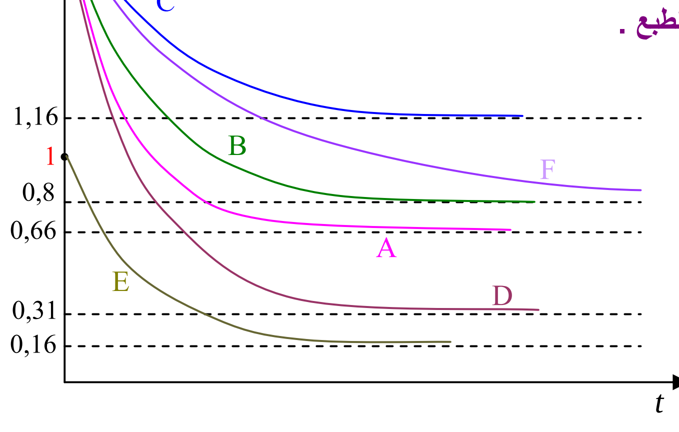
المزيج D : الكحول أولي (المزيج غير متساوي المولات) ، $\frac{x_f^2}{(2-x_f)^2(4-x_f)^2}=4$ ، وبحل المعادلة نجد : $x_f=1{,}69\,mol$

، وبالتالي : $n_{acide}=2-1{,}69=0{,}31\,mol$

المزيج E : نفس نتائج المزيج C ، حيث $x_f=0{,}84\,mol$ أما $n_{acide}=1-0{,}84=0{,}16\,mol$.

المزيج F : نفس نتائج المزيج B ، حيث $x_f=1{,}2\,mol$ ، أما $n_{acide}=2-1{,}2=0{,}80\,mol$.

جمعنا هذه النتائج في الجدول أعلاه باللون الأحمر .



البيانات المرسومة في الكتاب كلها مسحوبة نحو الأسفل بسبب خطأ في الطبع .

ولهذا نعيد رسمها بشكل صحيح .

نلاحظ أنه فقط في التجربة F يكون التفاعل أبطأ

(عدم وجود شوارد H_3O^+)

التمرين 21

1 – رسم البيان (البيان A)

2 – زمن نصف التفاعل هو المدة اللازمة لكي تتفاعل نصف الكمية الحدية للحمض .

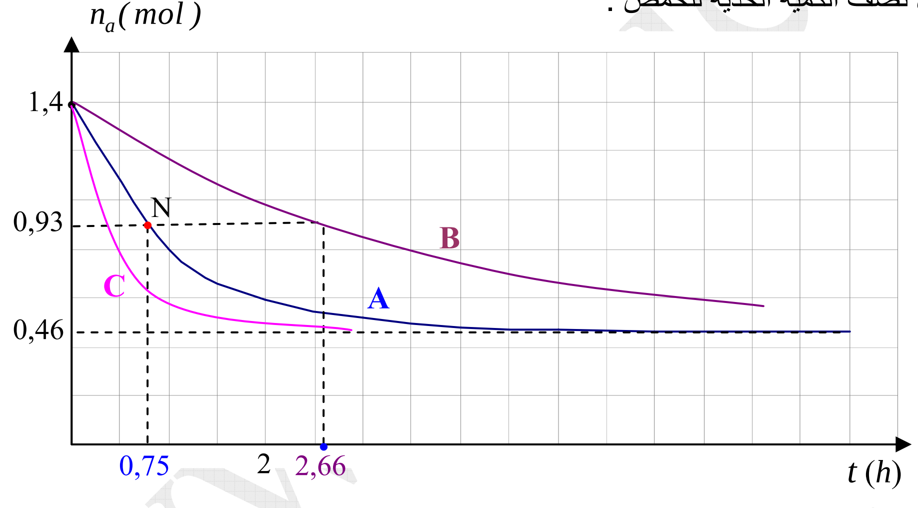
الكمية الحدية هي $n=1{,}4-0{,}46=0{,}94\,mol$

نصف هذه الكمية هو $0{,}47\,mol$

وبالتالي يكون ترتيب النقطة N هو :

$n = 0{,}46 + 0{,}47 = 0{,}93$ mol

زمن نصف التفاعل هو إذن $t_{1/2}=0{,}75\,h$



3 – من أجل درجة الحرارة $\theta_2 = 180°C$

يكون التفاعل أبطأ لكنه يؤول للقيمة الحدية 0,46 (البيان B) .

4 - من أجل درجة الحرارة $\theta_1 = 200°C$ ، وبإضافة قطرات من حمض الكبريت (وجود شوارد H_3O^+) يكون التفاعل أسرع (البيان C)

التمرين 22

1 – صيغ الكحولات وأسماءها وأصنافها :

رقم الكحول	الصيغة نصف المفصّلة للكحول	اسم الكحـول	صنف الكحـول
A	$CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - OH$	بوتـان – 1 - أول	أولي
B	$CH_3-CH(CH_3)-CH_2-OH$	2 – ميثيل بروبان – 1 - أول	أولي
C	$CH_3-CH_2-CH(OH)-CH_3$	بوتـان- 2 - أول	ثـانوي
D	$CH_3-C(CH_3)_2-OH$	2 – ميثيل بروبـان – 2 - أول	ثـالثي

2 – صيغ الأسترات الناتجة عن تفاعل الكحولات السابقة مع حمض الإيثانويك :

الصيغة نصف المفصّلة للأستر	اسـم الأستر
$CH_3-CH_2-CO-O-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$	بروبانوات البوتيل
$CH_3-CH_2-CO-O-CH_2-CH(CH_3)-CH_3$	بروبانوات 2 – ميثيل بروبيل
$CH_3-CH_2-CO-O-CH(CH_3)-CH_2-CH_3$	بروبانوات 1 – ميثيل بروبيل
$CH_3-CH_2-CO-O-C(CH_3)_2-CH_3$	بروبانوات 1 ، 1 – ميثيل إيثيل

3 - الصيغة المجملة للأستر هي $C_7H_{14}O_2$ ، وكتلته الجزيئية المـولية $M = 130\ g\,.\,mol^{-1}$.

الكتلة الناتجة من الأستر عند التوازن $m = M \times n$

- بالنسبة للكحولين A و B (أوليان) : $n_{ester} = 0,3 \times 0,67 = 0,201\,mol$ ، وبالتالي كتلة الأستر $m = 130 \times 0,201 = 26\,g$
- بالنسبة للكحول C (ثانوي) : $n_{ester} = 0,3 \times 0,60 = 0,18\,mol$ ، وبالتالي كتلة الأستر $m = 130 \times 0,18 = 23,4\,g$
- بالنسبة للكحول D (ثالثي) : نعتبر المردود 10%

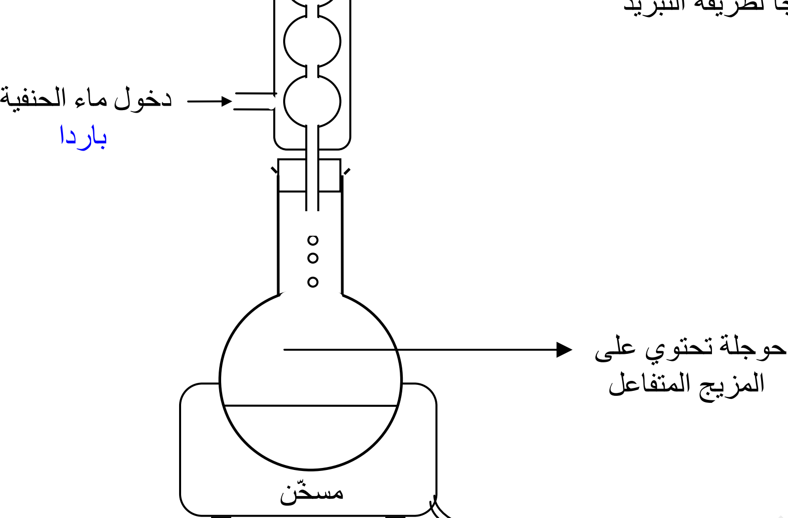
$n_{ester} = 0,3 \times 0,10 = 0,03\,mol$ ، وبالتالي كتلة الأستر $m = 130 \times 0,03 = 3,9\,g$

4 – **التقطير المرتد** :

يعتمد التقطير المرتد على تكثيف أبخرة المتفاعلات عند مغادرتها المزيج التفاعلي وإرجاعها للحوجلة ، لأننا نسخّن المزيج من أجل تسريعه ، وهذا يؤدّي أحيانا على تجاوز درجة غليان بعض المتفاعلات .

ملاحظة :

يمكن أن نغطي الحوجلة ونمنع المتفاعلات من مغادرتها ، لكن هذا يرفع ضغط المزيج التفاعلي ، ونحن نريد أن يجري التفاعل في ضغط ثابت ، إذن نلجأ لطريقة التبريد المرتد التي يبقى فيها الضغط ثـابتا .



التمرين 23

لما نسخن الأستر مع محلول حمض الكبريت يتفاعل الأسـتر مع الماء الذي حللنا فيه حمض الكبريت (محلول مائي) أما حمض الكبريت يدخل بالشوارد H_3O^+ لكي يسرع التفاعل فقط ، إذن التفاعل هو تفاعل إمــاهة .

في نهـاية التفاعل نعاير الحمض بواسطة هيدروكسيد الصوديوم (الحمض الذي نعايره هو الحمض الكربوكسيلي الناتج عن إماهة الأستر مع حمض الكبريت كله ، لأن هذا الأخير لم يتفاعل ، قام بدور وسيط فقط)

1 – حجم المحلول الأســاسي اللازم لمعايرة حمض الكبريت :

نعلم أن حمض الكبريت يتحلل في الماء حسب المعادلة : $H_2SO_4 + 2\,H_2O = 2\,H_3O^+ + SO_4^{2-}$

وبالتالي : $\left[H_3O^+\right] = 2C$

$$V'_{BE} = \frac{\left[H_3O^+\right]\times V}{C_B} = \frac{2C\times V}{C_B} = \frac{2\times 9}{4} = 4{,}5\,mL$$

2 - الحجم اللازم لمعــايرة الحمض الكربوكسيلي الناتج عن الإمــاهة هو $V_B = 13{,}9 - 4{,}5 = 9{,}4\,mL$

كمية مادة الحمض الكربوكسيلي هي $n'_{acide} = C_B V_{BE} = 4\times 9{,}4\times 10^{-3} = 3{,}76\times 10^{-2}\ mol$

3 – كتلة الأستر التي حدثت لها إماهة هي : $m = 5{,}8\times\frac{75{,}4}{100} = 4{,}37\,g$ ، وتوافق كمية مادة قدرها $n_{ester} = \frac{4{,}37}{M}$ ، حيث M هي الكتلة الجزيئية المولية للأسـتر .

هذه الكمية هي نفسها كمية مادة الحمض الكربوكسيلي الناتج ، أي $\frac{4{,}37}{M} = 3{,}76\times 10^{-2}$ ، ومنه $M = 116\,g.mol^{-1}$

نعلم أن الصيغة العامة للأسترات هي $C_nH_{2n}O_2$ ، وبالتالي $14n + 32 = 116$ ، ومنه $n = 6$

الصيغة المجملة للأسـتر هي $C_6H_{12}O_2$

بما أن في الحمض والكحول نفس عدد ذرات الكربون ، إذن الصيغ نصف المفصّلة الممكنة للأستر هي :

$CH_3-CH_2-\overset{\overset{\Large O}{||}}{C}-O-CH_2-CH_2-CH_3$ ، $CH_3-CH_2-\overset{\overset{\Large O}{||}}{C}-O-\underset{\underset{\Large CH_3}{|}}{\overset{\overset{\Large CH_3}{|}}{CH}}$

التمرين 24

1 – الصيغة المجملة للأستر : $14n+32=88$ ، ومنه $n=4$ ، الصيغة المجملة هي إذن C_4H_8O

الصيغ نصف المفصلة :

الصيغة نصف المفصّلة للأستر	الكتابة الطوبولوجية
$H-COO-CH_2-CH_2-CH_3$	
$H-COO-CH-(CH_3)_2$	
$CH_3-COO-C_2H_5$	
$CH_3-CH_2-COO-CH_3$	

2 - **تذكير ببعض المعلومات من برنامج السنة الثانية** :

الأكسدة المقتصدة للكحولات : هي الأكسدة التي تتغير فيها الوظيفة من كحولية إلى ألدهيدية أو حمضية أو سيتونية بدون تغيير السلسلة الفحمية للكحــول . نستعمل عادة المؤكسدين القويين : برمنغنات البوتاسيوم وثنـائي كرومات البوتاسيوم .

صنف الكحـول		المركب العضوي الناتج عن الأكسدة المقتصدة	الزمرة الوظيفية للمركب الناتج
أولي	كمية المؤكسد ناقصة	ألدهيد	$-\overset{\overset{\Large O}{||}}{C}-H$
	كمية المؤكسد زائدة	حمض كربوكسيلي	$-\overset{\overset{\Large O}{||}}{C}-O-H$
ثانوي	مهما كانت كمية المؤكسد	سيتــون	$C-\overset{\overset{\Large O}{||}}{C}-C$
ثــالثي		لا شيء (الكحول الثالثي لا يتأكسد أكسدة مقتصدة)	

3 - تفاعل الأستر مع الصود هو تفاعل تصبن وينتج عنه ملح وكحول . النوع الكيميـائي B هو كحول ثـانوي لأنه يتأكسد ويعطي سيتونا (كيتونا) .

معادلة التفـاعل : $C_nH_{2n+1} - COO - C_{n'}H_{2n'+1} + (Na^+, OH^-) = (C_nH_{2n+1} - COO^-, Na^+) + C_{n'}H_{2n'+1} - OH$

تفاعل التصبن هو تفاعل تــام ، وبالتالي :

$\frac{4,4}{2,98} = \frac{88}{14n'+18}$ ، ومنه $n' = 3$

الصيغة نصف المفصّلة للكحول B هي : $CH_3 - CHOH - CH_3$

4 - المقصود هو الصيغة الحقيقية للأستر E وليس لـ B .

عدد ذرات الكربون في جزيء الأستر هو 4 ، وعدد ذرات الكربون في جزيء الكحول هو 3 ، إذن عدد ذرات الكربون في الحمض هو 1 ،

وبما أن الكحول ثانوي إذن الصيغة نصف المفصلة للأستر E هي

$$H-\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}-O-\underset{\underset{\displaystyle CH_3}{|}}{\overset{\overset{\displaystyle CH_3}{|}}{CH}}$$

معادلة التصبّن :

$$H - COO - CH(CH_3)_2 + (Na^+, OH^-) = (H - COO^-, Na^+) + CH_3 - CHOH - CH_3$$

التمرين 25

1 - معادلة التفاعل :

$$CH_3 - CH_2 - CH_2 - COO - C_2H_5 + H_2O = CH_3 - CH_2 - CH_2 - COOH + C_2H_5 - OH$$

2 – نعلم أن تفاعل الإمـاهة بطيء جدا في البرودة ، ولهذا عندما نريد معايرة الحمض النـاتج يجب تبريد المزيج حتى يتوقف التفاعل ونتمكن من معايرة الحمض الناتج .

3 – كمية مادة الحمض المعـايَر هي : $n_{acide} = C_B V_{BE} = 2 \times 17,6 \times 10^{-3} = 3,52 \times 10^{-2}\ mol$

هذه الكمية من الحمض موجودة في 10 mL من المزيج ، أما في المزيج (180 mL) يوجد :

$$n'_{acide} = 3,52 \times 10^{-2} \times \frac{180}{10} = 6,34 \times 10^{-1}\ mol$$

كمية مادة الأستر الباقية هي : $n_{ester} = 1 - 6,34 \times 10^{-1} = 3,66 \times 10^{-1}\ mol$

مردود الإمــاهة $\rho = \frac{x_f}{x_m} = \frac{0,634}{1} = 0,634$

ملاحظة : يمكن حساب المردود بطريقة أخرى :

نعلم أن ثابت توازن هذا التفاعل هو $K = \frac{1}{4}$ ، وبالتالي $\frac{x_f^2}{(1-x_f)(5-x_f)} = \frac{1}{4}$ ، وبحل المعادلة نجد $x_f = 0,63\,mol$.

وبالتالي $\rho = \frac{x_f}{x_m} = \frac{0,63}{1} = 0,63$.

4 – إذا كان المزيج متكافئا في كمية المادة (مزيج متساوي المولات) يكون التقدّم النهــائي $x_f = 0,33\,n_0$ ، حيث n_0 هي كمية المادة الابتدائية للأستر وكذلك الماء . وبالتالي المردود يكون $\rho = \frac{0,33\,n_0}{n_0} = 0,33$

كلما كان الفرق أكبر بين كميتي مادة المتفاعلين يكون المردود أحسن .

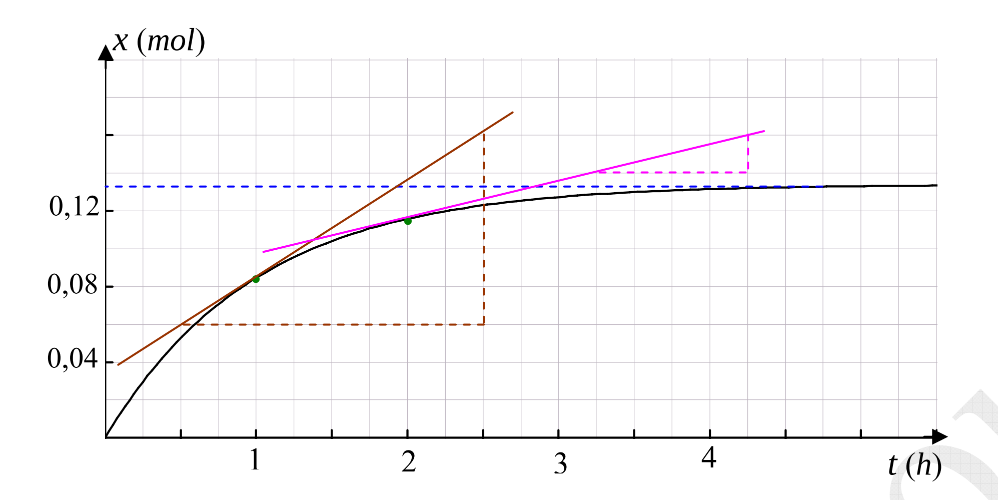
التمرين 26

1 – التركيبة موجودة في حل التمرين 22 (نفس التركيبة)

2 - معادلة التفاعل : $CH_3-CH_2-COOH + CH_3-CH_2-OH = CH_3-CH_2-COO-CH_3-CH_2 + H_2O$

3 – نصحّح البيان حتى نتمكن من الإجابة على السؤالين 3 و 4 .

سبب تصحيح البيان : هو أن البيان أصبح أفقيا من أجل قيمة لـ x_f (0,114 mol) ، وهذه القيمة أقل من القيمة الحقيقية التي توافق كحولا أوليا ، أي $x_f = 0,2 \times 0,67 = 0,134\, mol$



3 – نلاحظ أنه بعد 4 ساعات يصبح البيان أفقيا ، وهذا معناه أن المزيج قد وصل لحالة التوازن .

4 – التقدم النهائي :

من البيان : $x_f = 0,134\, mol$

ولدينا $x_m = 0,2\, mol$

نستنتج أن التفاعل غير تــام .

5 - سرعة التفاعل هي $v = \frac{dx}{dt}$

وتمثل ميل المماس عند اللحظة t .

عند $t = 1\, h$: $v_1 = \frac{5 \times 0,02}{2} = 5 \times 10^{-2}\, mol.h^{-1}$

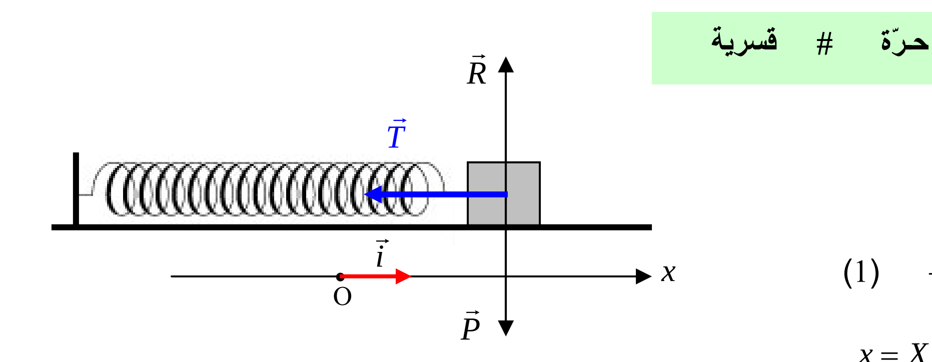
عند $t = 2\, h$: $v_2 = \frac{0,02}{1} = 2 \times 10^{-2}\, mol.h^{-1}$ ، وبنفس الطريقة نجد السرعة عند $t = 3\, h$ وتكون أصغر من v_2

نلاحظ أن السرعة تتناقص بمرور الزمن إلى أن تنعدم ظاهريا .

التمرين 01

1 – ما دامت الجملة المهتزة لا تخضع لمثير خارجي يؤثر على دورها الذاتي وسعتها ، فاهتزازاتها تكون حرّة .

حـرّة # قسرية



2 – نبض الإهتزازات :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\,\vec{a}$ ، ولدينا $\vec{P}+\vec{R}=0$

$-kx\,\vec{i}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، ومنه $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$ (1)

معادلة تفاضلية حلّها من الشكل : $x=X\cos(\omega_0 t+\varphi)$

باشتقاق هذه المعادلة الزمنية بالنسبة للزمن مرّتين نجد : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2\,x=0$ (2)

المعادلة التفاضلية (1) توافق المعادلة التفاضلية المعطاة : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+100x=0$ (3)

إذن زيادة على أن الاهتزازات حرّة فهي غير متخامدة .

بمطابقة العلاقتين (2) و (3) ، نجد $\omega_0^2=100$ ، ومنه $\omega_0=10\ rd/s$

3 - ثابت مرونة النابض :

بمطابقة العلاقتين (1) و (3) نجد $\dfrac{k}{m}=100$ ، ومنه $k=100\ m=100\times 1=100\ N/m$

التمرين 02

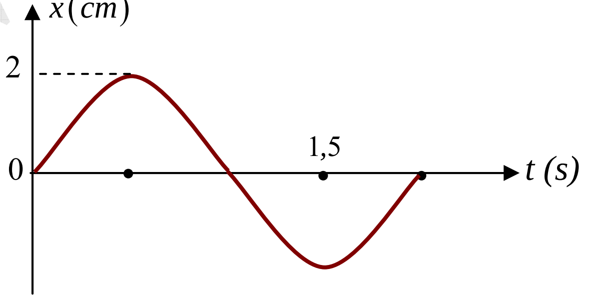
1 – **المثال الأول** : رقاص ميقاتية . يقوم بحركة اهتزازية دورها 2 s .

إهتزازاته حرّة غير متخامدة ، فهي مغذاة إما بطريقة ميكانيكية أو بطريقة كهربائية لتعويض الطاقة الضائعة .

المثال الثاني : حركة أرجوحة . تقوم بحركة اهتزازية حرة متخامدة إذا بقي راكبها ساكنا في مقعده ، أما بدأ يلوّح بقدميه ذهابا وإيابا فإن اهتزازات الأرجوحة لا تبقى حرّة ، بل تصبح خاضعة لإثارة خارجية هي اهتزازات أرجل الراكب ، فيتأثر الدور والسعة كذلك .

مثل هذه الاهتزازات نسميها قسريّة (نتعرّف عليها في الدرس الثاني)

2 -



أ) السعة X = 2 cm (أكبر قيمة لـ x)

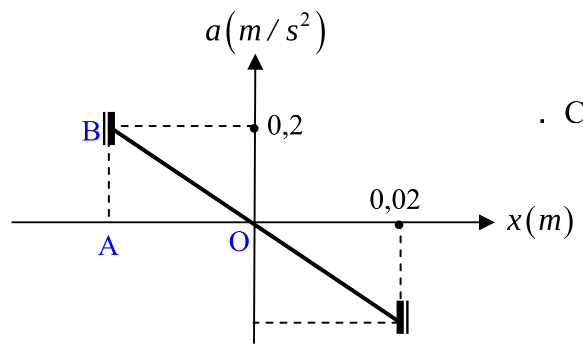
ب) الدور : $\dfrac{3T_0}{4}=1,5$ ، ومنه $T_0=2\ s$

جـ) التواتر : $N_0=\dfrac{1}{T_0}=\dfrac{1}{2}=0,5\ Hz$

د) السرعة العظمى : $|v_{max}|=X\,\omega_0=X\times 2\pi N_0=0,02\times 6,28\times 0,5=6,3\times 10^{-2}\ m/s$

التمرين 03

تصحيح : على محور الفواصل نضع المطال (x) وليس السعة (X)



1 - من البيان لدينا العلاقة : $a = -C\,x$ ، حيث $-C$ هو ميل البيان ، $C > 0$.

هذه العلاقة يُمكن كتابتها بالشكل : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0$

هذه العلاقة من الشكل : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0 \quad (1)$

وهي المعادلة التفاضلية الموافقة لاهتزازات حرّة غير متخامدة .

2 - الدور : لدينا من البيان : $C = \omega_0^2 = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{0,2}{0,02} = 10$ ، ولدنا $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ أو $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{\omega_0^2} = \dfrac{40}{10} = 4$ ، وذلك

بوضع $\pi^2 = 10$ ، ومنه : $T_0 = 2s$

3 – المعادلة التفاضلية (1) حلها من الشكل : $x = X\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2)$

من الشروط الابتدائية لدينا : عند $t = 0$ ، $x = X$ (أعظم فاصلة موجبة)

بالتعويض في المعادلة الزمنية (2) ، نكتب : $X = X\cos\varphi$ ، ومنه $\cos\varphi = 1$ ، ومنه $\varphi = 0$

سعة الحركة : من العلاقة $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\, x$ ، أكبر قيمة لـ x (وهي X) توافق أكبر قيمة للتسارع $\left|\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|$.

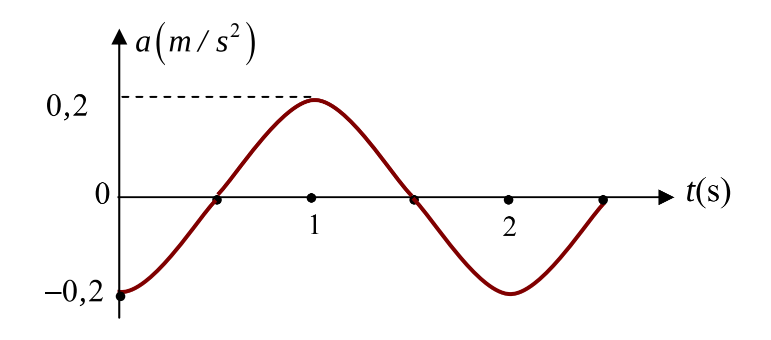
على البيان أكبر تسارع هو $|a| = 0,2\ m/s^2$ ، وهذا يوافق $|x| = 2\ cm$ ، ومنه السعة هي $X = 2\ cm$.

المعادلة الزمنية هي : $x = 2\cos\sqrt{10}\,t \quad (cm)$

تمثيل التسارع $a(t)$:

نشتق مرّتين $x(t)$ فنجد $a(t) = -X\omega_0^2 \cos\sqrt{10}\,t = -0,2\cos\sqrt{10}\,t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$a(m/s^2)$	$-0,2$	0	$+0,2$	0	$-0,2$



التمرين 04

1 – المعادلة التفاضلية :

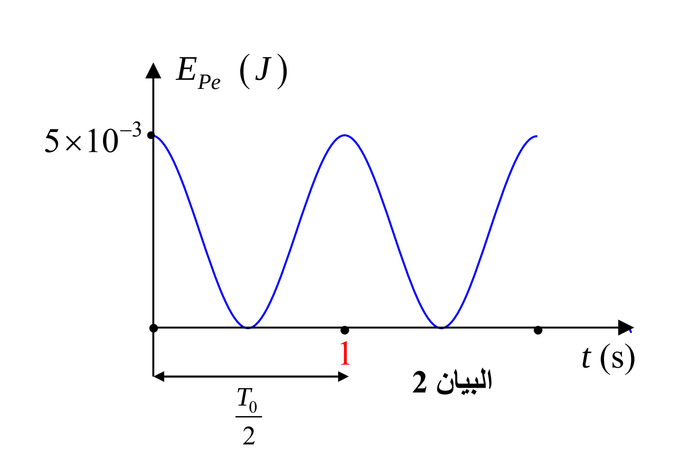
من البيان – 1 نستنتج أن الاحتكاك غير موجود

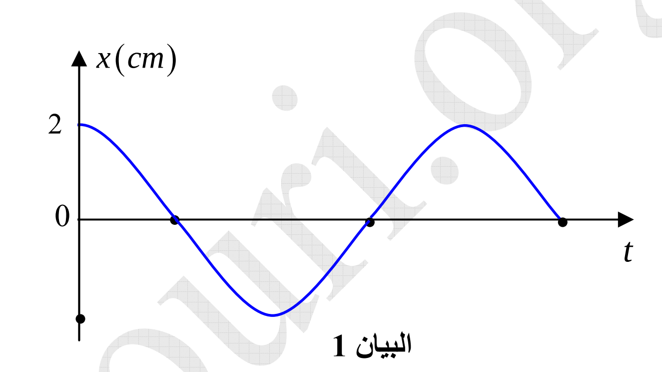
لأن سعة الاهتزاز بقيت ثابتة بمرور الزمن .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\,\vec{a}$ ، ولدينا $\vec{P}+\vec{R}=0$

$-kx\,\vec{i}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، ومنه $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$ (1)





2 - حل المعادلة التفاضلية (1) من الشكل : $x=X\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (2)

السعة : من البيان – 1 لدينا : $X = 2\ \text{cm}$

الدور : من البيان – 2 لدينا $\dfrac{T_0}{2}=1$ ، ومنه $T_0 = 2\ \text{s}$

الصفحة الإبتدائية : من البيان – 1 لدينا : عند $t=0$ ، $x=X$

بالتعويض في المعـادلة الزمنية (2) : $X = X\cos\varphi$ ، ومنه $\cos\varphi=1$ ، ومنه $\varphi=0$

المعادلة الزمنية هي : $x=2\cos\dfrac{2\pi}{T_0}t$ ، وبالتعويض : $x=2\cos\pi t\ \ (cm)$

3 – عبارة الطاقة الكامنة $E_{Pe}(t)$:

$$E_{Pe}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(0,02\cos\frac{2\pi}{T_0}t\right)^2=2\times10^{-4}k\cos^2\pi t$$

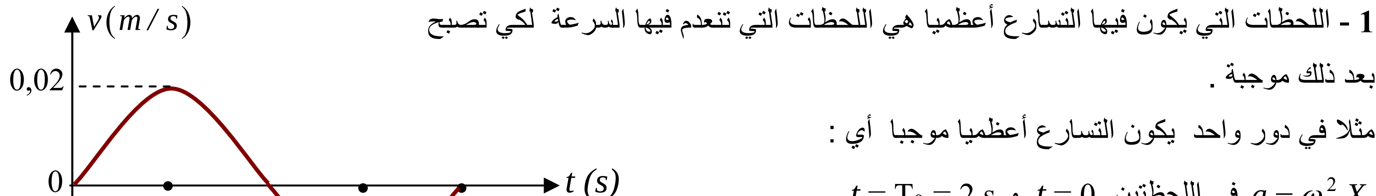
4 – من البيان (2) لدينا : $\dfrac{1}{2}kX^2=5\times10^{-3}$ ، وهي أعظم طاقة كامنة مرونية وتكون من أجل $x=X$.

ومنه : $k=\dfrac{2\times5\times10^{-3}}{(0,02)^2}=25\ N/m$

لدينا $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ ، ومنه $m=\dfrac{k}{\omega_0^2}=\dfrac{25}{10}=2,5\ kg$

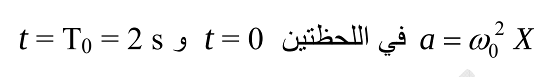
التمرين 05

تصحيح : التسارع يكون أعظميا موجبا ليس في لحظة واحدة .



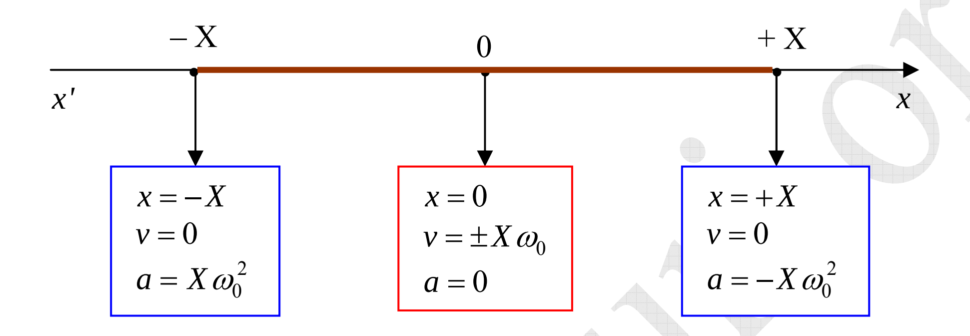
1 - اللحظات التي يكون فيها التسارع أعظميا هي اللحظات التي تنعدم فيها السرعة لكي تصبح بعد ذلك موجبة .

مثلا في دور واحد يكون التسارع أعظميا موجبا أي :



$a = \omega_0^2\ X$ في اللحظتين $t = 0$ و $t = T_0 = 2\ s$

هذا الملخص ليس من التمرين ، لكنه يُفيدك :



قيمة التسارع الأعظمي هي $a = X\omega_0^2$ (1)

من مخطط السرعة في الشكل لدينا $X\omega_0 = 0,02$ (2)

ولدينا $T_0 = 2\ s$ و $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi\ rd/s$ ، وبالتعويض في (2) نجد $X = \dfrac{0,02}{\pi}$ ، وبالتعويض في (1)

$$a = \frac{0,02}{\pi}\pi^2 = 6,3\times10^{-2}\ m/s^2$$

2 - الطاقة الحركية العظمى : $E_{C\,max} = \dfrac{1}{2}m\ v^2 = 0,5\times0,2(0,02)^2 = 4\times10^{-5}\ J$

3 - تمثيل $E_c(t)$: $E_c(t) = \dfrac{1}{2}m\ [v(t)]^2$

لدينا : $v(t) = -X\omega_0\ sin(\omega_0 t + \varphi)$ (3)

نلاحظ على مخطط السرعة أنه عند $t = 0$ يكون $v = 0$ ، وبالتعويض في (3) نجد $0 = -X\omega_0\ sin\varphi$

ونعلم أن $X\omega_0 \neq 0$ ، إذن $sin\varphi = 0$ ، وبالتالي $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$

نعلم أن عند $t = 0$ كان التسارع موجبا .

عبارة التسارع هي : $a(t) = -X\omega_0^2\ cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، ولما نعوّض فيها $t = 0$ نجد $a(t) = -X\omega_0^2\ cos\varphi$.

لكي يكون هذا التسارع موجبا يجب أن تكون $\varphi = \pi$ لأن $cos\,\pi = -1$.

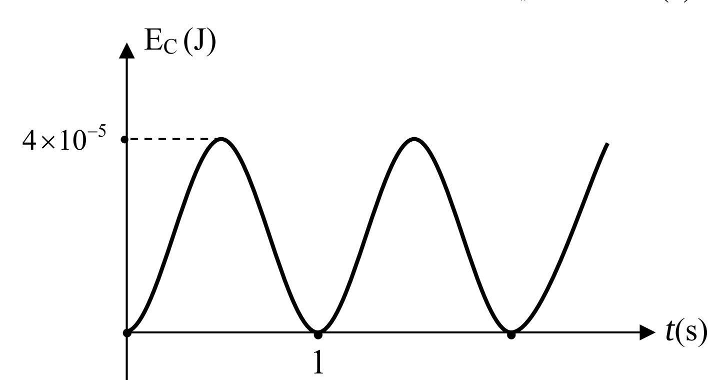
طريقة أخرى لإيجاد φ :

عند $t = 0$ كانت السرعة معدومة لتصبح بعد ذلك موجبة ، إذن $x = -X$.

لدينا $x = X\,cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، وبالتعويض نجد $cos\varphi = -1$ ، ومنه $\varphi = \pi$

عبارة السرعة هي إذن $v(t)=-0{,}02\sin(\pi t+\pi)=0{,}02\sin\pi t$ ، وبالتالي تكون عبارة الطاقة الحركية :

$$E_C(t)=4\times10^{-5}\sin^2\pi t$$



4 – قيمة ثابت مرونة النابض k :

لدينا $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ ، ومنه $k=m\,\omega_0^2=0{,}2\times\pi^2=2\ N/m$

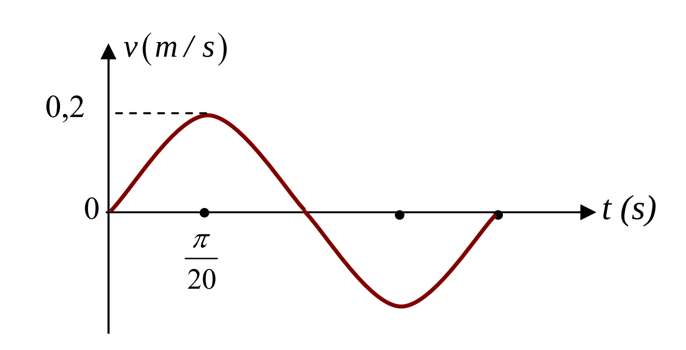
ملاحظة :

هذا النابض يستطيل عند التوازن بالقيمة

$$\Delta l=\frac{P}{k}=\frac{mg}{k}=\frac{0{,}2\times10}{2}=1\ m$$

لم نعرف مثل هذه النوابض في مخابرنا !!

لو أستُعْملت المعطيات التالية في التمرين يكون أحسن :



التمرين 06

1 - إذا كانت السعة صغيرة يكون القوس $\overset{\frown}{AB'}$ منطبقا تقريبا مع القطعة المستقيمة AB .

في هذه الحالة يكون $tg\theta_0=\frac{AB}{l}=\frac{10}{100}=0{,}1$ ، ومنه $\theta_0=5{,}7°=0{,}1\ rd$

ما دامت السعة $\theta_0<10°$ يمكن اعتبارها صغيرة .

2 – تواتر الإهتزاز : $N_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2}=0{,}5\ Hz$

3 - دور النواس البسيط من أجل السعات الصغيرة هو : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ، ومنه :

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T_0^{\,2}}=\frac{4\times9{,}86\times1}{4}=9{,}86\ m/s^2$$

4 – المعادلة الزمنية لحركة النواس البسيط من أجل الاهتزازات صغيرة السعة هي : $\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (1)

السرعة الزاوية للنواس هي $\frac{d\theta}{dt}=-\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ (2)

السرعة الزاوية العظمى هي : $\frac{d\theta}{dt}=\pm\theta_0\omega_0$ ، وبالتعويض في (2) نجد $\sin(\omega_0 t+\varphi)=\pm1$ ، ومنه

$\omega_0 t+\varphi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

بالتعويض في (1) نجد الفاصلة الزاوية $\theta=\theta_0\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}=0$

5 – التسارع الزاوي هو $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega_0^2\ cos(\omega_0 t + \varphi)$ (3)

التسارع أعظمي موجب معناه $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta_0\omega_0^2$ ، وبالتعويض في (3) نكتب : $\theta_0\omega_0^2 = -\theta_0\omega_0^2\ cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، ومنه

$cos(\omega_0 t + \varphi) = -1$ ، وبالتالي $\omega_0 t + \varphi = \pi$.

نعوّض في (1) ونجد $\theta = \theta_0\ cos\,\pi = -\theta_0$

طريقة أخرى : لدينا $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\,\theta$ ، فلكي يكون $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ أعظميا موجبا يجب أن يكون θ أعظميا سالبا ، أي $\theta = -\theta_0$

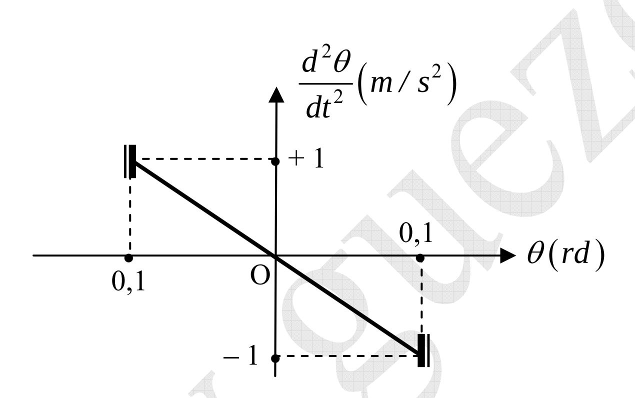
6 – تمثيل $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ بدلالة المطال الزاوي θ :

المطلوب هو تمثيل العلاقة $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\,\theta$ ، حيث أن البيان عبارة عن مستقيم يمر بالمبدأ وميله يكافيء $-\omega_0^2$

لدينا $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rd/s$

القيمتان الحديتان للتسارع الزاوي هما $-\omega_0^2\,\theta_0 < \frac{d^2\theta}{dt^2} < \omega_0^2\,\theta_0$ ، أي $-\pi^2 \times 0{,}1 < \frac{d^2\theta}{dt^2} < \pi^2 \times 0{,}1$ ، أي

$-1 < \frac{d^2\theta}{dt^2} < +1$ ، وذلك بأخذ $\pi^2 \approx 10$



التمرين 07

1 – **دور النواس البسيط** : هو الزمن الفاصل بين مرورين متعاقبين للنواس في نفس الوضع في نفس الجهة .

أو : الدور هو الزمن اللازم لتكرار المسار مرتين .

2 - العلاقة المعطاة تنطبق مع دور الاهتزازات صغيرة السعة ، تكون عبارة الدور في هذه الحالة :

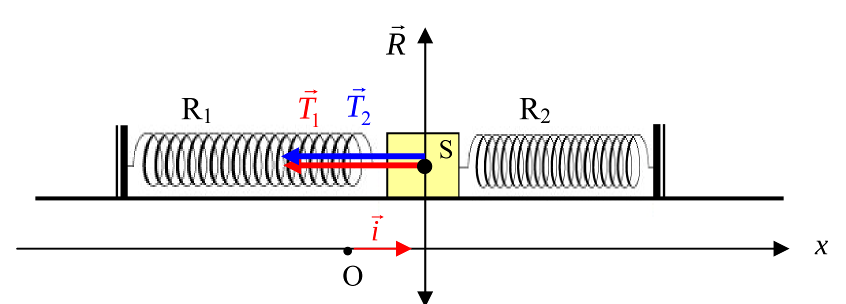
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi(m)^0(l)^{\frac{1}{2}}(g)^{-\frac{1}{2}}$$

بالمطابقة مع العلاقة المعطاة $T = k\ m^x\ l^y\ g^z$ ، نجد $x = 0\ ,\ y = \frac{1}{2}\ ,\ z = -\frac{1}{2}$

كل ما يمكن استنتاجه هو أن الاهتزازات صغيرة السعة وأن دور النواس البسيط مسقل عن كتلته .

3 - لدينا $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ، ومنه $g = \frac{4\pi^2 \times l}{T_0^2} = \frac{4 \times 9{,}86 \times 1}{4} = 9{,}86\ m/s^2$

التمرين 08



1 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم :

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=m\,\vec{a}$$

$$\vec{P}+\vec{R}=0$$

بقدر ما يتقلّص R_2 يستطيل R_1 .

$-k_1 x\,\vec{i}-k_2 x\,\vec{i}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، ومنه $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k_1+k_2}{m}x=0$ (1)

2 - المعادلة التفاضلية (1) حلها من الشكل : $x=X\cos(\omega t+\varphi)$ (2)

(في هذا التمرين رمزنا للدور الذاتي بـ T)

باشتقاق المعادلة (2) بالنسبة للزمن مرتين نجد : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ (3)

بمطابقة (1) و (3) نجد $\omega^2=\dfrac{k_1+k_2}{m}$ ، ولدينا $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}=6{,}28\sqrt{\dfrac{0{,}4}{90}}=0{,}42\ s$

3 – المعادلة الزمنية $x=f(t)$:

الصفحة الإبتدائية :

حسب الشروط الابتدائية : عند $t=0$ يكون $x=0$ و $v>0$

نعوّض في المعادلة (2) : $0=X\cos\varphi$ ، ومنه $\varphi=\dfrac{\pi}{2}rd$ ، $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}rd$.

لدينا $v=\dfrac{dx}{dt}=-X\omega\sin(\omega t+\varphi)$. عند $t=0$ يكون $v=-X\omega\sin\varphi$.

من أجل $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}rd$ تكون $v=-X\omega\sin\dfrac{3\pi}{2}=+X\omega$ ، هذه القيمة موجبة لأن $\omega>0$, $X>0$.

إذن الصفحة الابتدائية هي $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}rd$

سعة الحركة : هي القيمة التي أزحنا بها الجسم عن وضع توازنه ، أي X = 2 cm .

نبض الحركة : $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{6{,}28}{0{,}42}\approx 15\ rd/s$

المعادلة الزمنية هي : $x=2\cos\left(15t+\dfrac{3\pi}{2}\right)\ (cm)$

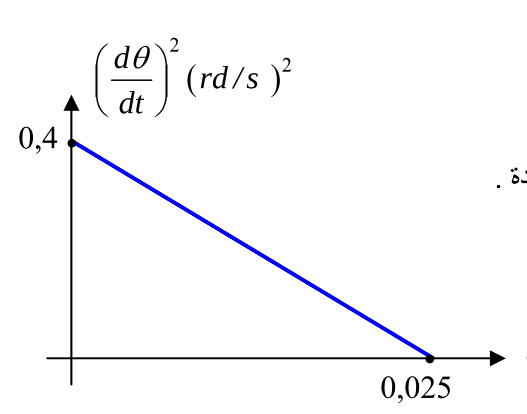
4 - لدينا $v=\dfrac{dx}{dt}=-\,0{,}02\times 15\sin\left(15t+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\,0{,}3\sin\left(15t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ، وبوضع $t=0$ نجد

$v=3{,}0\times 10^{-1}\ m/s$

بعد زمن قدره ربع دور $\left(\dfrac{T}{4}\right)$ يصبح الجسم في أعظم مطال موجب ، وبالتالي تنعدم سرعته (لأنه كان في اللحظة $t=0$ في المبدأ متجها نحو المطالات الموجبة) .

بعد زمن قدره نصف دور ابتداء من $t=0$ يصبح الجسم في مبدأ الفواصل وهو متجه نحو المطالات السالبة ، وبالتالي تكون سرعته عظمى لكن سالبة ، أي $v=-3{,}0\times10^{-1}\ m/s$.

التمرين 09



1 – إذا كانت المعادلة التفاضلية لتغيّر الفاصلة الزاوية θ من الشكل :

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\,\theta=0$ ، أي $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$ تكون الاهتزازات حرّة غير متخامدة .

في هذه الحالة تكون المعادلة الزمنية من الشكل :

$$\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi) \quad (1)$$

وتكون السرعة الزاوية $\frac{d\theta}{dt}=-\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ (2)

بتقسيم طرفي المعادلة (2) على ω_0^2 ، نكتب : $\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\omega_0}=-\theta_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ (3)

بتربيع طرفي المعادلتين (1) و (3) نجد : $\frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\omega_0^2}=\theta_0^2\ \sin^2(\omega_0 t+\varphi)$ و $\theta^2=\theta_0^2\ \cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

وبجمع هاتين المعادلتين طرفا لطرف نكتب : $\frac{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\omega_0^2}+\theta^2=\theta_0^2$ ، (لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$) ، ومنه :

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\omega_0^2\,\theta^2+\omega_0^2\,\theta_0^2$ ، هذه العلاقة هي معادلة مستقيم ميله $-\omega_0^2$ ويقطع محور التراتيب في $\omega_0^2\,\theta_0^2$

هذه العلاقة توافق البيان المعطى ، وبالتالي هذه الاهتزازات حرّة غير متخامدة .

2 – دور الاهتزازات :

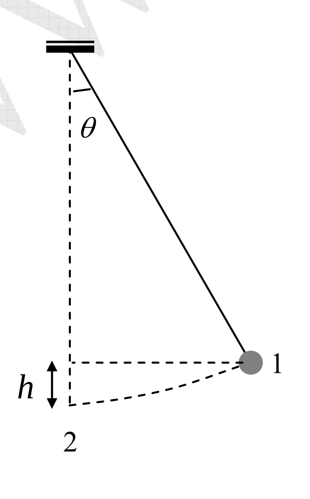
ميل البيان هو $-\omega_0^2=-\frac{0{,}4}{0{,}025}$ ، ومنه $\omega_0=4\ rd/s$ ، ولدينا $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{4}=1{,}57\ s$

3 – السعة الزاوية θ_0 :

من البيان $\omega_0^2\,\theta_0^2=0{,}4$ ، ومنه $\theta_0=\frac{\sqrt{0{,}4}}{\omega_0}=\frac{0{,}63}{4}\approx0{,}16\ rd$

طول النواس l :

لدينا $\omega_0^2=\frac{g}{l}$ ، ومنه $l=\frac{g}{\omega_0^2}=\frac{10}{16}$ ، $l=62{,}5\ cm$

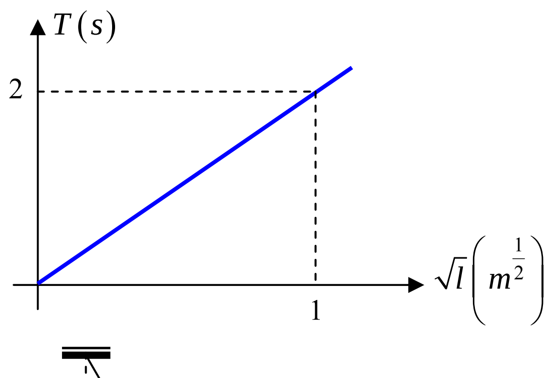


4 - بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين (1) و (2) :

$\frac{1}{2}m\,v_2^2-\frac{1}{2}m\,v_1^2=mg\ h$ ، ومنه $v_2^2=2g\ h$ (لأن $v_1=0$)

$$h=l-l\cos\theta=0{,}625(1-0{,}86)=0{,}087m$$

$v_2^2 = 2\times10\times 0{,}087 = 1{,}74$ ، $v_2 = 1{,}32\ m/s$



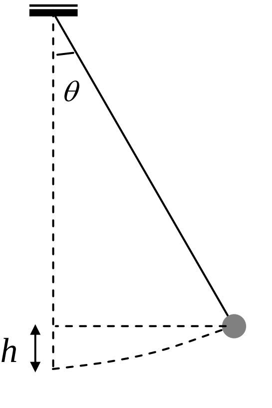
التمرين 10

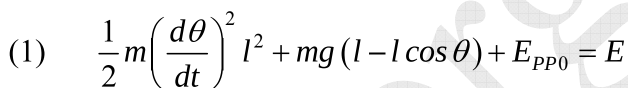
1 – العبارة البيانية $T = b\sqrt{l}$ ، مستقيم يمر من المبدأ ميله b

2 – الدراسة الطاقوية :

$E_C + E_{PP} = E$

$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + E_{PP0} = E$ ، حيث E_{PP0} تتعلق بالوضع المرجعي .





$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 l^2 + mg\,(l - l\cos\theta) + E_{PP0} = E \qquad (1)$$

باشتقاق طرفي العلاقة (1) بالنسبة للزمن :

$2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\times l^2\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgl\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$ ، ومنه $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

الاهتزازات صغيرة السعة إذن : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (2)$

و هي معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، وباشتقاق هذه المعادلة مرتين بالنسبة للزمن نجد

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0 \qquad (3)$$

بمطابقة (2) و (3) نجد $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ، ولدينا $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

3 - من علاقة الدور نكتب $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$ ، حيث $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ هو ميل البيان .

من البيان : $\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = \frac{2}{1} = 2$ ، نستنتج $g = 9{,}86\ m/s^2$



4 - التسارع a :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F} = m\,\vec{a}$

نسقط على محور مواز ومنطبق مع $\vec{F}$: $F = m\,a$

حيث $\vec{F}$ هي محصلة $\vec{T}$ و $\vec{P}$.

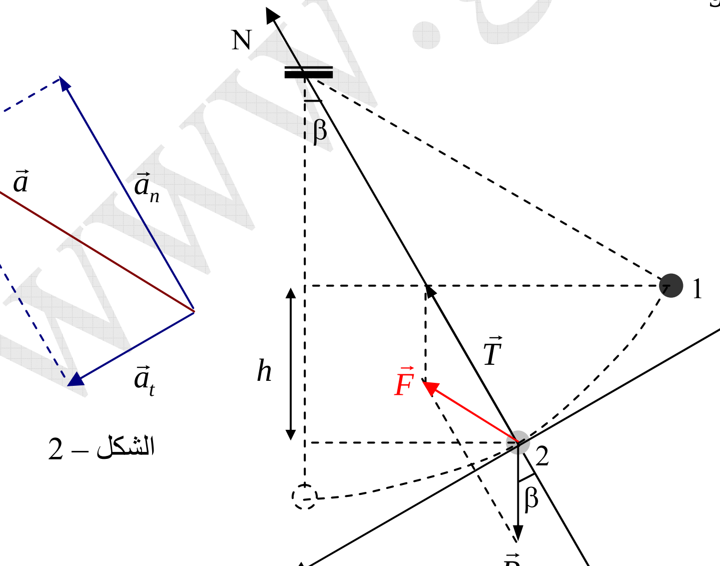
قانون محصلة قوتين هو :

$$F^2 = P^2 + T^2 + 2PT\cos\left(\vec{P},\vec{T}\right) \qquad (4)$$

الزاوية بين $\vec{T}$ و $\vec{P}$ هي :

$\left(\vec{P},\vec{T}\right) = 180 - 30 = 150°$

لحساب T (قوّة توتر الخيط) نطبق القانون الثاني لنيوتن في الوضع (2) .



الشكل – 1

الشكل – 2

$\vec{P}+\vec{T}=m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط العلاقة الشعاعية على المحور الناظمي

$T-P\cos\beta=m\dfrac{v_2^2}{l}$ ، ومنه $T=P\cos\beta+m\dfrac{v_2^2}{l}$ (5)

نحسب v_2^2 بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين (1) و (2) : $\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=mgh$

$v_2^2=2gh$ (6)

من الشكل – 1 لدينا $h=l(\cos\beta-\cos\alpha)=1(0{,}866-0{,}500)=0{,}366\ m$

بالتعويض في العلاقة (6) نجد: $v_2^2=2\times10\times0{,}366=7{,}32$

بالتعويض في العلاقة (5) نجد $T=0{,}5\times0{,}866+0{,}05\dfrac{7{,}2}{1}=0{,}79N$

نحسب شدّة القوة F من العلاقة (4) $F^2=(0{,}5)^2+(0{,}79)^2+2\times0{,}5\times0{,}79\cos150°$ ، F = 0,43 N

وبالتالي نحسب التسارع $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{0{,}43}{0{,}05}=8{,}6\ m/s^2$

التسارع المماسي a_t :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في الوضع (1) والإسقاط على المحور المماسي نجد : $P\sin\beta=m\,a_t$ ، ومنه :

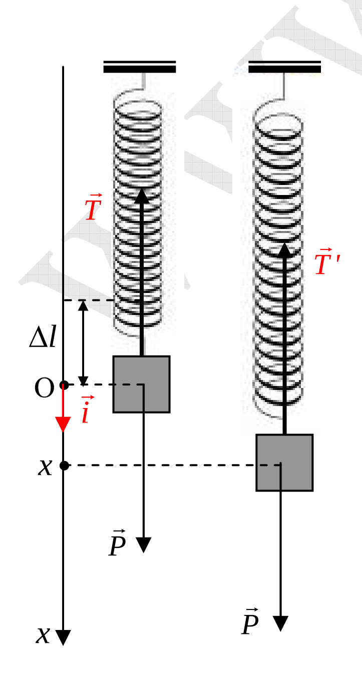
$$a_t=\frac{P\sin\beta}{m}=\frac{0{,}5\times0{,}5}{0{,}05}=5\ m/s^2$$

من الشكل – 2 الذي رسمناه منفصلا عن الشكل – 1 ليكون واضحا ، نكتب : $a^2=a_t^2+a_n^2$ ، ومنه :

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{(8{,}6)^2-(5)^2}=7\ m/s^2$$

ملاحظة : كان بالإمكان حساب التسارع الناظمي أولا من العلاقة $a_n=\dfrac{v_2^2}{l}$ ، ثم التسارع المماسي ثم نستنتج محصلتهما التي تمثل التسارع a ، لكن ارتأينا أن نتبع الترتيب الوارد في السؤال .

التمرين 11



1 - عند التوازن يكون $P\vec{i}-k\Delta l\,\vec{i}=0$ (1)

ومنه $\Delta l=\dfrac{mg}{k}$

2 – الدراسة الحركية : لما نسحب الجسم نحو الأسفل ونتركه وتصبح فاصلة مركز عطالته (x)

نطبّق عليه القانون الثاني لنيوتن $\vec{T}'+\vec{P}=m\,\vec{a}$ ، أي : $P\vec{i}-k(x+\Delta l)\vec{i}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$

$P\vec{i}-kx\vec{i}-k\Delta l\,\vec{i}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، وباستعمال العلاقة (1) يصبح لدينا :

$-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ، ومنه المعادلة التفاضلية $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0$ (2)

هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل : $x = X\cos(\omega_0 t+\varphi)$ وهي المعادلة الزمنية لحركة جيبية .

إضافة : كل حركة مستقيمة تسارعها من الشكل $a=-bx$ ، حيث b عدد حقيقي موجب هي حركة جيبية ، والعكس صحيح ، أي :
كل حركة مستقيمة جيبية تسارعها من الشكل $a=-bx$.

3 - باشتقاق المعادلة الزمنية مرتين بالنسبة للزمن نجد $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2\, x=0$ (3)

بمطابقة العلاقتين (2) و (3) نكتب $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ ، ولدينا $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ ، وبالتالي : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

نستنتج الدور الذاتي من البيان $x(t)$ ، حيث لدينا $\frac{3T_0}{4}=0{,}75$ ، ومنه $T_0=1\ s$

4 - لدينا $x = X\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$v=-X\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ ، وبتربيع طرفي كل علاقة نجد :

$$x^2=X^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) \quad (4)$$

$$v^2=X^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) \quad (5)$$

بتقسيم طرفي العلاقة (5) على ω_0^2 ، نكتب : $\frac{v^2}{\omega_0^2}=X^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$ (6)

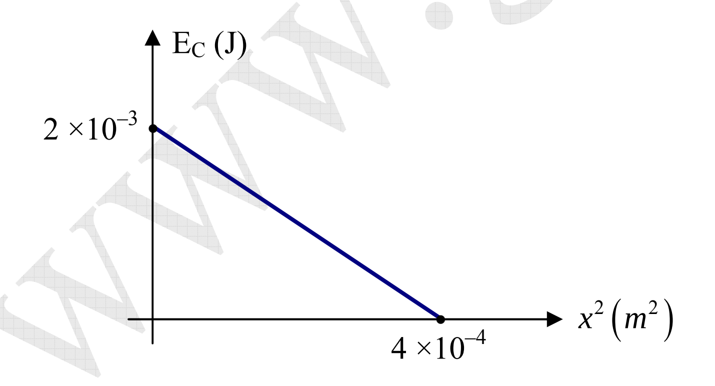
بجمع العلاقتين (4) و (6) طرفا لطرف ، نجد $\frac{v^2}{\omega_0^2}+x^2=X^2\left(\sin^2(\omega_0 t+\varphi)+\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\right)$ ، ومنه

$$v^2=\omega_0^2\left(X^2-x^2\right)$$

عبارة الطاقة الحركية هي إذن : $E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(X^2-x^2\right)$

5 - لدينا $E_C=-\frac{1}{2}m\omega_0^2\,x^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2\,X^2$. عبارة الطاقة الحركية من الشكل : $E_C=-Bx^2+C$ ، حيث

$B=\frac{1}{2}m\omega_0^2$ ، $C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\,X^2$



حساب الكتلة m :

$-\frac{1}{2}m\omega_0^2=-\frac{2\times10^{-3}}{4\times10^{-4}}$ (ميل المستقيم)

ولدينا $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi\ rd/s$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد $\boldsymbol{m=0{,}25\ kg}$

حساب السعة X :

لدينا $C=\frac{1}{2}m\omega_0^2\,X^2=2\times10^{-3}$ ، ومنه نجد $\boldsymbol{X=0{,}02\ m}$

حساب ثابت المرونة k :

لدينا $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ، ومنه $k = m\,\omega_0^2 = 0{,}25 \times 4\pi^2$ ، $\boldsymbol{k = 10\ N/m}$

حساب الصفحة الابتدائية φ

من البيان $x(t)$ لدينا عند $t=0$ يكون $x=0$ و $v>0$ (لأن المطالات تتزايد بعد $t=0$ ، أي أن المتحرك متجه في الجهة الموجبة للمحور) .

نعوّض في المعادلة الزمنية $x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ونجد : $0 = X\cos\varphi$ ، ومنه $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

لكي نختار الصفحة الابتدائية الصحيحة نعوّض في عبارة السرعة $v = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ الزمن $t=0$

$v(0) = -X\omega_0 \sin\varphi$ ، هذه السرعة تكون موجبة من أجل $\boldsymbol{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$

6 - حساب السرعة عند الفاصلة $x = 1\ cm$

نعوّض في المعادلة الزمنية $x(t)$ ، ونكتب : $1 = 2\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ، ومنه : $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}$

إن حل هذه المعادلة يعطي $\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{3}$ ، $\omega_0 t + \varphi = \frac{5\pi}{3}$. لو عوّضنا هاتين القيمتين في عبارة السرعة لوجدنا من أجل $\omega_0 t + \varphi = \frac{5\pi}{3}$ السرعة موجبة ، وهذا يتوافق مع الشروط الابتدائية $(v>0)$ إذن نرفض القيمة $\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{3}$.

$$v = -\,0{,}02 \times 2\pi \times \sin\frac{5\pi}{3} = 0{,}11\ m/s$$

التمرين 12

I – الدراسة البيانية :

1 - الإهتزازات حرّة (لا يوجد مثير خارجي) متخامدة (السعة تنقص بمرور الزمن) .

2 - شبه الدور : لدينا مدّة 6 أدوار هي $t = 3{,}36\ s$ ، وبالتالي $T = \frac{t}{6} = \frac{3{,}36}{6} = 0{,}560\ s$.

3 - نلاحظ على مخطط الفاصلة أن عند $t_0 = 0$ لدينا $x = 3\ cm$

عند $t = T$ لدينا $x = 3\ cm$

عند $t = 5T$ لدينا $x = 2{,}3\ cm$

$x(cm)$
3
0
T
$t(s)$
3,36 s

II - **دراسة طاقوية**

1 – الطاقة الكلية للجملة : $E=\frac{1}{2}k\ x^2+\frac{1}{2}m\ v^2$

2 - في اللحظات : $t=0$ ، $t=\text{T}$ ، $t=5\ \text{T}$ تكون سرعة الجسم معدومة لأن المطال يكون أعظميا في هذه اللحظات ، وبالتالي تكون الطاقة الحركية معدومة .

عند اللحظة $t=0$ تكون $E=E_{Pe}=\frac{1}{2}\times 13\ (0{,}03)^2=5{,}85\times 10^{-3}\,J$

عند اللحظة $t=\text{T}$ السعة لم تتغير ، وبالتالي $E=E_{Pe}=\frac{1}{2}\times 13\ (0{,}03)^2=5{,}85\times 10^{-3}\,J$

عند اللحظة $t=5\text{T}$ لدينا السعة $\text{X'}=2{,}3\ \text{cm}$ ، وبالتالي $E=E_{Pe}=\frac{1}{2}\times 13\ (0{,}023)^2=3{,}44\times 10^{-3}\,J$

3 - نلاحظ أن قيمة الطاقة الكلية تتناقص بمرور الزمن ، والسبب في ذلك هو وجود قوى الاحتكاك .

4 - المعادلة الزمنية يمكن اعتبارها من الشكل $x=X\cos(\omega t+\varphi)$ (1) . حيث $\omega\approx\omega_0$

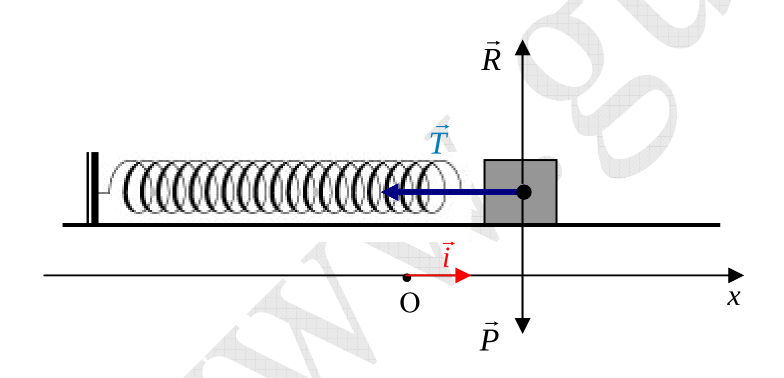
عند المرور بوضع التوازن يكون $X\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$ ، وبالتالي $\omega_0 t+\varphi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

المرور الأول يوافق $k=0$ ، أي : $\omega_0 t+\varphi=\frac{\pi}{2}$.

نعوض في عبارة السرعة $v=-X\,\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ ونستنتج

$$v=-X\,\omega_0\sin\frac{\pi}{2}=-X\,\omega_0=-\ 0{,}03\times\frac{2\pi}{0{,}56}=-\ 0{,}33\ m/s$$

III - **الدراسة التحريكية**



1 – تمثيل القوى : (على الشكل)

2 -

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على حركة الجسم :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\,\vec{a}$ ، ، ولدينا $\vec{P}+\vec{R}=0$

$-kx\,\vec{i}=m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، ومنه $m\frac{d^2x}{dt^2}+k\ x=0$ (1)

نبيّن أن المعادلة الزمنية $x=X\cos(\omega_0 t+\varphi)$ هي حل للمعادلة التفاضلية (1)

نشتق المعادلة الزمنية مرتين فنجد $\frac{d^2x}{dt}=-\omega_0^2\ X\cos(\omega_0 t+\varphi)$ ، وبالتعويض في (1) :

$-m\omega_0^2\ X\cos(\omega_0 t+\varphi)+k\ X\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$ لأن $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ ، ومنه المساواة محققة .

3 - عبارة الدور : لدينا $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ ، ومنه $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

4 – لدينا $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ، نقوم بتحليل بعدي للدور الذاتي : $[T_0] = \sqrt{\left[\frac{[K]}{[K][M][T]^{-2}[M]^{-1}}\right]} = \sqrt{[T]^2} = [T]$

وحدة ثابت المرونة هي N/m ، ونعلم أن النيوتن هو كتلة مضروبة في تسارع .

5 - قيمة الدور الذاتي : $T_0 = 6,28\sqrt{\frac{0,1}{13}} = 0,550\ s$

الدّقة هي الإرتياب النسبي على شكل نسبة مئوية $\frac{|T - T_0|}{T_0} = \frac{0,56 - 0,55}{0,55} = 0,02$ ، وبالتالي الدقة هي 2 %

التمرين 13

1 – تكون شدة التيار عظمى عند نهاية التفريغ ، أي عندما يكون التوتر بين طرفي المكثفة معدوما .

2 - نحسب الشدة العظمى من عبارة الطاقة المخزّنة في الوشيعة $E_L = \frac{1}{2} L I_{max}^2$ ، أي $I_{max} = \sqrt{\frac{2E_L}{L}}$ (1)

نحسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة قبل تفريغها : $E_C = \frac{1}{2} C u^2 = 0,5 \times 20 \times 10^{-9} \times (10)^2 = 10^{-6}\, J$

الطاقة المغناطيسية المخزّنة في الوشيعة $E_L = \frac{5}{6} \times E_C = \frac{5}{6} \times 10^{-6} = 8,3 \times 10^{-7}\, J$.

بالتعويض في العلاقة (1) : $I_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 8,3 \times 10^{-7}}{0,05}} = 5,76 \times 10^{-3}\, A$.

3 - باعتبار أن الاهتزازات شبه دورية يكون شبه الدور $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28\sqrt{0,05 \times 20 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^{-4}\, s$

تُفرغ المكثفة في زمن قدره $t = \frac{T_0}{4} = \frac{2 \times 10^{-4}}{4} = 0,5 \times 10^{-4}\, s$

التمرين 14

1 – قيمتا L و C_2 :

النظام دوري ، وبالتالي $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$ ، ومنه $L = \frac{T_1^2}{4\pi^2 C_1}$ (1)

لدينا من التمثيل البياني الخاص بهذه الدارة $4T_1 = 1,6\, ms$ ، ومنه $T_1 = 0,4\, ms$ ، وبالتعويض في العلاقة (1)

$$L = \frac{(0,4 \times 10^{-3})^2}{40 \times 0,1 \times 10^{-6}} = 0,04\, H$$

من أجل حساب C_2 نكتب عبارة شبه الدور الخاص بالدارة الثانية $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2}$ ، ومنه $C_2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2 L}$ (2)

نحسب الدور من التمثيل البياني الخاص بهذه الدارة ، $1,75\, T_2 = 1,4\, ms$ ، ومنه $T_2 = 0,8\, ms$.

نعوّض في العلاقة (2) $C_2 = \frac{(0,8 \times 10^{-3})^2}{40 \times 0,04} = 4,0 \times 10^{-7}\, F$

2 – $\frac{C_2}{C_1} = \frac{0,4 \times 10^{-6}}{0,1 \times 10^{-6}} = 4$ و $\frac{T_2}{T_1} = \frac{0,8}{0,4} = 2$ ، ومنه $\frac{T}{\sqrt{C}} = Cst$

3 – طاقة كل جملة : $E_t = E_C + E_L$

في اللحظة $t = 0$ (عندما تكون شحنة المكثفة عظمى) تكون $E_L = 0$ وبالتالي $E_t = E_C$

الدارة الأولى : $E_C = \frac{1}{2}C_1u^2 = 0,5\times 0,1\times 10^{-6}\times (6)^2 = 1,8\times 10^{-6}\,J$

الدارة الثانية : $E_C = \frac{1}{2}C_2u^2 = 0,5\times 4\times 10^{-7}\times (6)^2 = 7,2\times 10^{-6}\,J$

4 – القيمة العظمى للتيار الكهربائي : نتحصل عليها عندما تكون المكثفة مفرّغة ، أي $u_C = 0$ ، أي $E_L = \frac{1}{2}LI^2$

الدارة الأولى : $I_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{L}} = \sqrt{\frac{2\times 1,8\times 10^{-6}}{0,04}} = 9,5\times 10^{-3}\,A$

الدارة الثانية : $I_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{L}} = \sqrt{\frac{2\times 7,2\times 10^{-6}}{0,04}} = 1,9\times 10^{-2}\,A$

التمرين 15

1 – الظاهرة : اهتزازات حرة غير متخامدة ناتجة عن تبادل الطاقة بين الوشيعة والمكثفة بدون ضياع .

2 – حسب قانون جمع التوترات فإن : $L\frac{di}{dt} + u_C = 0$ ، ولدينا $q = C\,u_C$ وبالتالي $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ (1)

هذه المعادلة التفاضلية حلّها من الشكل $q = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (2)

باشتقاق (2) مرتين نجد $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2\,u_C = 0$ (3)

بمطابقة (1) و (3) نجد $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ، ولدينا $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ، ومنه :

: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28\sqrt{0,1\times 10\times 10^{-6}} = 6,3\times 10^{-3}\,s$

التمرين 16

1 – نعلم أن في هذه الحالة تكون الاهتزازات الكهربائية متخامدة لأن الدارة لها مقاومة ، وهي مقاومة الوشيعة (r) . إذن يمكن أن نحصل على :

- ظاهرة الاهتزازات شبه الدورية إذا كانت $r << R_C$
- عدم اهتزاز إذا كانت $r >> R_C$ ، لأن في هذه الحالة الأخيرة يضيع جزء كبير من طاقة المكثفة في مقاومة الوشيعة على شكل حرارة ، وبالتالي تمر حالة الدارة مباشرة إلى نظام حرج (اختفاء الجزء السالب لبيان u_C) .

2 – حسب قانون جمع التوترات: $u_C + u_L = 0$ ومنه $u_C + ri + L\frac{di}{dt} = 0$ ، $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \qquad (1)$$

3 – من أجل $r = 0$ يصبح شكل المعادلة (1) $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

ملاحظة : التلميذ غير مطالب بكيفية حل هذه المعادلة التفاضلية ، بل يكتب الحل مباشرة . إذن في هذا السؤال نجيب كما يلي :

هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل : $u_C = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ فقط .

بواسطة المعطيات السابقة يمكن أن نحدّد فقط قيمة φ .

عند $t=0$ يكون $u_C = U_0$ ، وبالتالي $U_0 = U_0 \cos\varphi$ ، ومنه $\varphi = 0$.

ونكتب : $u_C = U_0 \cos\omega_0 t$

4 – الطاقة المخزّنة في المكثفة $E_C = \frac{1}{2}CU_0^2$ ، الطاقة المخزّنة في الوشيعة $E_L = \frac{1}{2}LI_m^2$

5 – التوتر الأعظمي بين طرفي المكثفة هو $U_m = U_0$. نضع $E_L = E_C$ ، أي :

$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_m^2$ ، وبالتالي $U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_m$